Муниципальный этап школьников по математике за 8 класс. Решения

1. Можно ли расположить числа 1, . . . , 9 в некотором порядке так, чтобы сумма каждых двух соседних чисел была простым числом? (Натуральное число, больше единицы, называется простым, если оно имеет ровно два натуральных делителя: один и само себя.)

Ответ. Да, можно. **Решение.** Например, расположим числа в порядке

1, 2, 3, 4, 7, 6, 5, 8, 9.

Суммы соседних чисел:

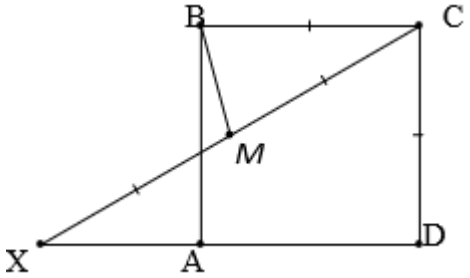
$$1 + 2 = 3,\quad 2 + 3 = 5,\quad 3 + 4 = 7,\quad 4 + 7 = 11,$$
$$7 + 6 = 13,\quad 6 + 5 = 11,\quad 5 + 8 = 13,\quad 8 + 9 = 17.$$

Все эти числа простые.

Критерии. Полное решение (верный пример с проверкой) — 20 баллов. Только ответ «да» без примера — 0 баллов. Пример без проверки — 14 баллов.

2. Дан квадрат $ABCD$. На продолжении стороны AD за точку A выбрана точка X такая, что $\angle DCX = 60°$. M — середина CX. Найдите угол CBM.

Ответ. 75°. **Решение.** В прямоугольном треугольнике DXC имеем



$\angle CXD = 90° - \angle DCX = 90° - 60° = 30°$.

Значит, катет CD, лежащий против угла 30°в два раза меньше гипотенузы CX. Поэтому

$$CM = \frac{1}{2}CX = \frac{1}{2}2CD = CD = BC$$

Следовательно, треугольник BCM равнобедренный. Поскольку

$$\angle BCM = 90° - \angle XCD = 90° - 60° = 30°.$$

Тогда угол при основании треугольника BMC

$$\angle \mathrm{CBM} = \frac{180^0 - 30^0}{2} = 75^0.$$

Критерии. Полное обоснованное решение — 20 баллов. Доказано, что BCM равнобедренный, но угол не найден — 14 баллов. Найден верный ответ без обоснования — 0 балл.

3. На доске записано некоторое натуральное число. Андрей и Серёжа играют в игру, первым ходит Андрей. В свой ход игрок заменяет текущее число m, стоящее на доске, либо на $m^2 + 1$, либо на $2m - 1$. Игрок, после хода которого число становится кратным 5, немедленно выигрывает. Игра может продолжаться бесконечно, если никто не может гарантировать выигрыш. Сколько существует натуральных чисел $n \leqslant 100$ таких, что если в начале на доске написано число n, то Андрей может выиграть, как бы ни играл его соперник?

Ответ. 60. **Решение.** Пусть на доске написано число x. Рассмотрим остатки x при делении на 5.

Если остаток x равен 2, то ходом $x \mapsto x^2 + 1$ получаем $2^2 + 1 = 5 \equiv 0 \pmod 5$. Если остаток равен 3, то оба хода дают кратность 5: $3^2 + 1 = 10 \equiv 0 \pmod 5$ и $2 \cdot 3 - 1 = 5 \equiv 0 \pmod 5$. В этих случаях Андрей выигрывает первым ходом.

Если остаток x равен 4, то $4^2 + 1 \equiv 2 \pmod 5$ или $2 \cdot 4 - 1 \equiv 2 \pmod 5$. Любой ход переводит в остаток 2, откуда соперник сразу выигрывает. При данных x выигрывает Сергей, а значит данные x нам не подходят.

Если остаток x равен 1, то $1^2 + 1 \equiv 2 \pmod 5$ или $2 \cdot 1 - 1 \equiv 1 \pmod 5$. Ход в остаток 2 даёт сопернику выигрыш, а ход в остаток 1 позволяет сопернику снова походить в остаток 1, т.е. продолжать игру можно бесконечно долго, а значит данные x нам тоже не подходят.

Если остаток равен 0, первый игрок делает ход $x \mapsto 2x - 1$, получая остаток 4. Затем соперник обязательно переводит в остаток 2, после чего первый игрок выигрывает. Итак, выигрышны остатки 0, 2, 3 (mod 5), поэтому подходят все натуральные $x \equiv 0, 2, 3 \pmod 5$, $x \leqslant 100$, таких 60.

Критерии. Полное решение — 20 баллов. Найдены только выигрышные остатки с обоснованием, почему они таковыми являются — 11 баллов. Верный ответ без обоснования —3 балла.

4. Неотрицательные числа x, y, z удовлетворяют условию

$$x + y + z = 1.$$

Докажите, что

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6xyz \leqslant 1.$$

Первое решение. Заметим, что:

$$1 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx.$$

Подставив это в исходное неравенство, достаточно доказать, что

$$6xyz \leqslant 2xy + 2yz + 2zx,$$

или

$$3xyz \leqslant xy + yz + zx.$$

Умножим правую часть на $1 = x + y + z$:

$$3xyz \leqslant (x + y + z)(xy + yz + zx).$$

После раскрытия получаем

$$3xyz \leqslant x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2 + 3xyz.$$

Вычитая $3xyz$ из обеих частей:

$$0 \leqslant x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2.$$

Это верно, так как $x, y, z \geqslant 0$.

Второе решение. Аналогично первому решению неравенство сводится к виду:

$$3xyz \leqslant xy + yz + zx.$$

Теперь докажем, что $xyz \leqslant xy$. Это верно так как x, y, z в сумме дают 1 и все неотрицательны, значит каждое не больше 1. Аналогично $xyz \leqslant yz$ и $xyz \leqslant zx$. Сложив три полученные неравенства получим требуемое.

Критерии. Полное доказательство — 20 баллов. Сведено к неравенству:

$$3xyz \leqslant xy + yz + zx$$

но не доведено до конца — 11 баллов.

5. На доске выписано 100 необязательно различных чисел. Для каждого из $2^{100}-1$ способов выбрать набор из нескольких выписанных чисел Дима записал в тетрадку сумму чисел в выбранном наборе. Какое наибольшее количество из выписанных чисел могут быть равны 1? Например, если бы на доске были написаны числа −1, 2, 2, то в тетради были бы записаны: 3 один раз, 4 один раз, 2 два раза, −1 один раз, 1 два раза. Итого, 2 единицы.

Ответ. 2^{99}. **Решение.** Такое количество единиц достигается, когда на доске выписаны 99 нулей и одна единица. Тогда сумма 1 будет у любого набора, содержащего 1, а таких наборов ровно 2^{99}, так как каждый из нулей мы можем брать или не брать в набор.

Оценка. Заметим, что на доске должно быть выписано хотя бы одно ненулевое число, так как иначе не будет ни одной суммы 1. Пусть выписано число $x \neq 0$. Тогда все наборы чисел на доске, кроме набора $\{x\}$, разбиваются на пары вида A и $A \cup \{x\}$. В каждой паре не более одного набора с суммой 1, поэтому всего в парах сумм 1 не более 299 − 1. Ещё, возможно, одна сумма набора $\{x\}$. Итого, не более 2^{99} пар.

Критерии. Полное решение (пример и оценка) — 20 баллов. Только пример — 6 баллов. Только оценка — 14 баллов. Замечено, что должно быть выписано одно ненулевое число — 3 балла. Верный ответ без обоснования
— 0 баллов.