Муниципальный этап школьников по математике за 7 класс. Решения

1. У Максима есть фишки трех цветов: красные (К), зелёные (З) и синие (С). Он поставил в ряд 7 фишек: КЗКЗКЗК. За один ход он может выбрать две любые фишки и заменить их самих и все фишки между ними по следующему правилу: красные меняются на зелёные, зелёные — на синие, синие — на красные. Как ему не более чем за 7 ходов сделать все фишки синими?

Решение. Например, можно сделать так за 6 ходов:

К З К З К З К → К З К З З С К → К З З С С С К →
→ К С С С С С К → К К К К К К К →
→ З З З З З З З → С С С С С С С

Комментарий. Существуют и другие примеры. Меньше, чем за 6 ходов сделать не получится.

- Правильный пример — *17 баллов*.
- Неправильный пример — *0 баллов*. В частности, если ходов больше 7, то такой пример считается неправильным.

2. На листе бумаги отмечены красным 4 точки. Саше хочется отметить ещё 4 зелёные точки так, чтобы на каждой прямой, проходящей через две красные точки, была отмечена зелёная точка. Обязательно ли Саше это удастся? Красные точки нельзя отмечать зелёным.

Ответ. Нет, удастся не всегда. **Решение.** Пусть красные точки расположены в вершинах квадрата. Рассмотрим 5 из 6 данных прямых – все кроме одной диагонали. Тогда на каждой из них лежит своя зеленая точка, потому что эти 5 прямых пересекаются только по красным точкам. То есть 4 зелёных точек не хватает.

Комментарий. В качестве примера подойдет любой параллелограмм. Никакой другой пример не подойдет, даже трапеция.

- Верное решение — 17 *баллов*.

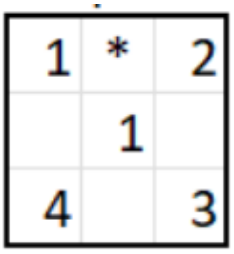
- Правильный пример расположения зелёных точек, но есть проблемы с обоснованием — *15 баллов*.
- Только ответ — *0 баллов*.
- Нет существенных продвижений — *0 баллов*.

3. Натуральные числа x и y таковы, что $8x$ больше $12y$. Может ли так быть, что $48y + 35$ не меньше $42x$?

Ответ. Нет, так не может быть. Решение. Из первого неравенства следует, что $2x > 3y$, а так как числа натуральные, то $2x \geqslant 3y + 1$. Предположим, что $48y + 35$ не меньше $42x$. Тогда $48y + 35 \geqslant 42x \geqslant 63y + 21$. Откуда $14 \geqslant 15y$, чего не бывает.

- Верное решение — *17 баллов.*
- Получено неравенство $42x > 63y$ или аналогичные ему, дальнейших продвижений нет — *7 баллов.*
- Только ответ — 0 баллов.
- Нет существенных продвижений — 0 баллов.

4. В какое наименьшее количество цветов нужно покрасить клетки доски 4 × 4 так, чтобы для каждой клетки все клетки, соседние с ней по стороне были покрашены в разные цвета, а также все клетки, соседние с ней по углу были покрашены в разные цвета?



Ответ. 5. **Решение.** Поймем, что четырёх и менее цветов нам не хватит. Возьмем не крайнюю клетку, все ее соседи по углу разных цветов. Так как цветов меньше 5, то она сама должна быть какого-то из этих цветов, пусть с левой верхней, иначе аналогично. Но тогда у клетки со звездочкой на рисунке справа все соседи не разных цветов. Пример для 5 цветов предоставлен на рисунке ниже.

1	2	3	4
3	4	5	1
5	1	2	3
2	3	4	5

- Верное решение — *17 баллов*.
- Доказано, что четырёх цветов не хватит — *7 баллов*.
- Приведён пример на 5 цветов — *5 баллов*.
- Только ответ — *0 баллов*.
- Нет существенных продвижений — *0 баллов*.

5. Дано натуральное число N. Серёжа перечислил все его натуральные делители в порядке возрастания, начиная с 1 и заканчивая N. Оказалось, что нечётные и чётные делители чередовались. Может ли N быть квадратом некоторого натурального числа?

Ответ. Не может. Решение 1. Число N содержит хотя бы 2 делителя, значит среди них есть четные делители, следовательно, N делится на 2. Если бы оно было квадратом, то делилось бы и на 4. Но тогда два наибольших делителя N и $\frac{N}{2}$ будут чётными, т.е. чередование нарушится.

Решение 2. Если N является квадратом, то у него нечетное число натуральных делителей. Значит наибольший делитель N (то есть само число N) должен быть нечетным. Но у N должны быть чётные делители — противоречие.

- Верное решение — *16 баллов.*
- Замечено, что N делится на 4 — *2 балла.*
- Только ответ — 0 баллов.
- Нет существенных продвижений — 0 баллов.

6. В театре работают n артистов, каждый из которых использует для своего образа некоторые из 12 разрешённых цветов. Каждый артист должен использовать как минимум 5 цветов. В один из дней руководитель театра добавил ещё условия: никакие два артиста не должны использовать один и тот же набор цветов, а каждый цвет могут использовать не более 20 артистов. При каком наибольшем n артисты смогут выполнить указания руководителя театра?

Ответ. 48. Решение. Посчитаем количество пар (артист, цвет), где цвет используется данным артистом. Их хотя бы $5n$, так как у каждого артиста хотя бы 5 цветов, и не больше $12 \cdot 20$, так как каждый

цвет могут использовать не более 20 артистов. Следовательно, n не больше 48.

Докажем, что для 48 артистов можно подобрать наборы цветов. Рассмотрим 8 множеств из 6 элементов (цветов):

$$A1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad A2 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$
$$A3 = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \quad A4 = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\},$$
$$A5 = \{9, 10, 11, 12, 1, 2\}, \quad A6 = \{11, 12, 1, 2, 3, 4\},$$
$$A7 = \{1, 2, 5, 6, 9, 10\}, \quad A8 = \{3, 4, 7, 8, 11, 12\}.$$

В каждом множестве Ai ровно 6 пятиэлементных подмножеств. Итого получаем $8 \cdot 6 = 48$ наборов. Каждому артисту сопоставим один из этих наборов цветов.

Проверим, что данный пример подходит под условие. Каждый цвет встречается ровно в 4 из 8 множеств Ai. В каждом таком множестве цвет входит в 5 из 6 пятиэлементных подмножеств (цвет остаётся, если удалён не он). Значит, для каждого цвета число артистов, использующих его, равно $4 \cdot 5 = 20$. Осталось заметить, что пересечение любых двух множеств Ai содержит не более четырёх элементов, по-этому все 48 наборов из примера различны.

- Верное решение — *16 баллов*.
- Доказано, что артистов не более 48 — *5 баллов*.
- Приведён пример на 48 артистов — *7 баллов*.
- Только ответ — *0 баллов*.
- Нет существенных продвижений — *0 баллов*.