Муниципальный этап школьников по математике за 11 класс. Решения

1. Даны десять различных натуральных чисел, не превосходящих 67. Докажите, что можно выбрать три из них так, чтобы их произведение было больше, чем квадрат любого из этих трёх чисел.

Решение. Рассмотрим три самых наибольших числа $a > b > c$. Заметим, что c — восьмое по величине число, поэтому $c \geqslant 8$. Тогда $ab > ac > bc \geqslant 8 \cdot 9 = 72 > a > b > c$. Следовательно, $abc > a^2 > b^2 > c^2$, что и требовалось доказать.

- Верное решение — *20 баллов.*
- Нет существенных продвижений — *0 баллов.*

2. На столе лежит n кучек, в каждой по одной конфете. За одну операцию можно выбрать две кучки, объединить их в одну и в объединённую кучку добавить ещё одну конфету. Можно ли выбрать такое n и так проводить операции, чтобы в конце осталась ровно одна кучка с 2026 конфетами?

Ответ. Нет, нельзя. **Решение.** Заметим, что каждый ход общее количество куч уменьшается на 1, а общее количество конфет увеличивается на 1. Значит, одна куча останется через $n - 1$ ход, а количество конфет в этот момент будет равно $2n - 1$, то есть нечётному числу.

- Верное решение — *20 баллов.*
- Замечено, что всего будет $n - 1$ операция — *3 балла.*
- Только ответ — *0 баллов.*
- Нет существенных продвижений — *0 баллов.*

3. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $AC = BC$ и $\angle ACB < 60°$. Точки I и O — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC соответственно. Описанная окружность треугольника BIO вторично пересекает отрезок BC в точке D. Луч

BI пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке E, отличной от B. Докажите, что $DE = DB$.

Решение. Пусть $\angle ACB = 2\alpha$. Тогда $\angle A = \angle B = 90° - \alpha$ и $\angle CBI = 45° - \alpha/2$. Из равнобедренности треугольника COB получаем, что $\angle OBC = \angle OCB = \alpha$. Пусть H — основание биссектрисы CI. Тогда из вписанности четырёхугольника $BOID$ получаем, что $\angle BDO = \angle BIH$. Угол BIH внешний для треугольника BIC, поэтому мы можем продолжить равенство:

$$\angle BDO = \angle BIH = \angle ICB + \angle CBI = \alpha + (45° - \alpha/2) = 45° + \alpha/2.$$

Получаем, что

$$\angle BDO + \angle CBI = (45° + \alpha/2) + (45° - \alpha/2) = 90°,$$

откуда $OD \perp IB$. Так как $OB = OE$ и $OD \perp BE$, то OD является серединным перпендикуляром к отрезку BE. Откуда $DB = DE$, что и требовалось доказать.

Комментарий. В решении равенство углов $\angle BDO = \angle BIH$ верно всегда, вне зависимости от расположения точек O и I. А, например, равенство $\angle BDO = \angle BIO$ верно только в случае, когда точка I находится на отрезке CO. Если же I находится на продолжении отрезка CO за точку O, то этот факт становится неверным. На самом деле при условии $\angle ACB < 60°$ верно, что O лежит на отрезке CI.

- Верное решение — *20 баллов.*
- В счёте углов используется расположение точек I и O без доказательства — не более 6 баллов.
- Доказано, что $OD \perp BE$ — *9 баллов.*
- Нет существенных продвижений — *0 баллов.*

4. В компании из n человек каждые двое или дружат, или враждуют. Известно, что каждый человек дружит со всеми друзьями его друзей, а также со всеми врагами его врагов. Оказалось, что пар людей, которые дружат, столько же, сколько пар людей, которые враждуют. Найдите все такие n, для которых это возможно.

Ответ. $n = 1$. **Решение.** Нетрудно убедиться, что $n = 1$ подходит. Пусть $n \geqslant 2$. Тогда рассмотрим пару человек A и B, враждующих

между собой (такие есть, так как дружащих столько же, сколько и враждующих). Заметим, что каждый из остальных дружит ровно с одним из A и B (иначе B для A был бы другом друга или врагом врага). Следовательно, все люди делятся на друзей A и друзей B, причём A и все его друзья дружат между собой (как друзья друга) и, аналогично, B и все его друзья также дружат между собой. Пусть первых — t человек, а вторых — $n - t$ соответственно. Так как количество пар людей, которые дружат, столько же, сколько пар людей, которые враждуют, то $C_t^2 + C_{n-t}^2 = t \cdot (n-t)$. То есть $\frac{t(t-1)}{2} + \frac{(n-t)(n-t-1)}{2} = nt - t^2$. После домножения на 2, переноса в одну часть и приведения подобных слагаемых, получаем, что $4t^2 - 4nt + n^2 - n = 0$, откуда $(n - 2t)^2 = n$. То есть n должно быть точным квадратом. Причём если $n = d^2$, то при $t = \frac{n-d}{2}$ будут выполнены равенства $(n - 2t)^2 = n$ и $C_t^2 + C_{n-t}^2 = t \cdot (n-t)$. То есть когда n является точным квадратом такое возможно.

- Верное решение — *20 баллов.*
- Доказано, что все люди разбиваются на две группы дружащих между собой людей — *3 балла*. После этого составлено уравнение — *+3 балла.*
- Доказано, что в случае, когда n является точным квадратом, существует пример — *6 баллов*. Этот критерий суммируется с предыдущим.
- Только ответ — *0 баллов.*
- Нет существенных продвижений — *0 баллов.*

5. Существует ли натуральное число n такое, что число $\overline{nn}$ является квадратом натурального числа? (Число $\overline{nn}$ — это два подряд записанных числа n. Например, если n = 123, то $\overline{nn}$= 123123.)

Ответ. Да, существует. **Решение.** Приведём одно из возможных построений числа n. Заметим, что $10^3 \equiv -1 \pmod{11}$, так как 1001 делится на 11. Следовательно, $10^{33} + 1 = (10^3)^{11} + 1^{11} = (10^3 + 1)(1 - 10^3 + 10^6 - 10^9 + \ldots + 10^{30})$. Первая скобка равна 1001, то есть делится на

11. Во второй скобке 11 слагаемых, каждое из которых даёт остаток 1 при делении на 11. Действительно, $-10^3 \equiv (10^3)^2 \equiv -(10^3)^3 \equiv (10^3)^4 \equiv \ldots \equiv 1 \pmod{11}$. То есть вторая скобка также делится на 11. Мы получили, что $10^{33} + 1 = 121 \cdot m$, где m — это 31-значное число, так как $10^{30} < \frac{10^{33}+1}{121} < 10^{31}$.

Положим $n = 100m = \overline{m00}$. Тогда в числе n — 33 знака и $\overline{nn} = n \cdot 10^{33} + n = n(10^{33} + 1) = 100m \cdot 121m = (110m)^2$.

Комментарий. Вместо числа 11 можно взять и другое число. Построение должно быть таким. Если в числе n — t знаков, то число $\overline{nn} = n \cdot 10^t + n = n(10^t + 1)$. Тогда $10^t + 1$ должно делиться на некоторый квадрат x^2, а $n = 10^{2k} \cdot \frac{10^t+1}{x^2}$. Тогда $\overline{nn} = n(10^t + 1) = 10^{2k} \cdot \frac{10^t+1}{x^2} \cdot (10^t + 1)$, что является квадратом. Главное, чтобы количество знаков в n равнялось t.

- Верное решение — *20 баллов.*
- Только ответ — 0 баллов.
- Нет существенных продвижений — 0 баллов.