Муниципальный этап школьников по математике за 9 класс

Максимальное время выполнения заданий: 235 минут.
Все задания оцениваются из 20 баллов.

1. У коллекционера Серёжи есть 5 монет разного веса, каждая весит натуральное число граммов. Для каждого набора из нескольких (хотя бы одной) своих монет Серёжа посчитал суммарный вес этого набора. Когда он выписал все эти числа (всего 31 число), среди них оказалась ровно одна пара равных. Приведите хотя бы один пример, как такое могло произойти.

2. Числа x, y, a, b, c, d таковы, что оба произведения $x \cdot (a - b + c - d + y)$ и $y \cdot (x - a + b - c + d)$ отрицательны. Докажите, что число $x \cdot y$ тоже отрицательно.

3. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $AC = BC$ и $\angle ACB < 60°$. Точки I и O — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC соответственно. Описанная окружность треугольника BIO вторично пересекает отрезок BC в точке D. Чему может быть равен угол между прямыми OD и BI?

4. В классе учатся 36 человек, некоторые из которых дружат (дружба взаимна). Оказалось, что никакие двое учеников с одинаковым количеством друзей не дружат между собой. Какое наибольшее количество пар друзей может быть в классе?

5. Серёжа задумал 10 последовательных трёхзначных чисел и переставил их в некотором порядке. Получил числа $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Могло ли так оказаться, что каждое из чисел a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}$ является квадратом натурального числа?