Муниципальный этап школьников по математике за 11 класс

Максимальное время выполнения заданий: 235 минут.
Все задания оцениваются из 20 баллов.

1. Даны десять различных натуральных чисел, не превосходящих 67. Докажите, что можно выбрать три из них так, чтобы их произведение было больше, чем квадрат любого из этих трёх чисел.

2. На столе лежит n кучек, в каждой по одной конфете. За одну операцию можно выбрать две кучки, объединить их в одну и в объединённую кучку добавить ещё одну конфету. Можно ли выбрать такое n и так проводить операции, чтобы в конце осталась ровно одна кучка с 2026 конфетами?

3. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $AC = BC$ и $\angle ACB < 60°$. Точки I и O — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC соответственно. Описанная окружность треугольника BIO вторично пересекает отрезок BC в точке D. Луч BI пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке E, отличной от B. Докажите, что $DE = DB$.

4. В компании из n человек каждые двое или дружат, или враждуют. Известно, что каждый человек дружит со всеми друзьями его друзей, а также со всеми врагами его врагов. Оказалось, что пар людей, которые дружат, столько же, сколько пар людей, которые враждуют. Найдите все такие n, для которых это возможно.

5. Существует ли натуральное число n такое, что число $\overline{nn}$ является квадратом натурального числа? (Число $\overline{nn}$ — это два подряд записанных числа n. Например, если $n = 123$, то $\overline{nn} = 123123$).