Муниципальный этап школьников по математике за 10 класс

Максимальное время выполнения заданий: 235 минут.
Все задания оцениваются из 20 баллов.

1. У коллекционера Серёжи есть 67 монет разного веса. Для каждого набора из нескольких (хотя бы одной) своих монет Серёжа посчитал суммарный вес этого набора. Когда он выписал все эти числа, среди них оказалась ровно одна пара равных. Докажите, что все 67 монет можно разделить на две группы так, чтобы суммарный вес монет в каждой группе был одинаковым.

2. Обозначим через a_n количество способов раскрасить клетки доски $2 \times n$ в чёрный и белый цвета так, чтобы у каждой клетки было нечётное число соседних по стороне клеток, покрашенных в чёрный цвет. Найдите $a_2 + a_3 + \ldots + a_{2026}$.

3. На основании AB равнобедренного треугольника ABC отмечена точка P. Точки R и Q на сторонах AC и CB таковы, что $CQPR$ — параллелограмм. Докажите, что точка, симметричная точке P относительно прямой RQ, лежит на описанной окружности треугольника
ABC.

4. Найдите все тройки натуральных чисел a, b, c такие, что

$$(2a - 1)(2b - 1)(2c - 1) = 3abc - 2.$$

5. Найдите все простые числа p такие, что сумма всех натуральных чисел от 1 до p включительно делится на все простые числа, не превосходящие p.