**Всероссийская олимпиада школьников по математике**

**2020–2021 уч. г.**

**Муниципальный этап**

**9 класс**

Любое верное решение в каждой задаче оценивалось в 7 баллов. Если ваша работа соответствует какому-либо критерию, то ставится именно эти баллы из критерия.

**Задача 1.** Маша старше своего брата настолько, сколько лет было её брату два года назад. А тринадцать лет назад им с братом вместе было столько лет, сколько сейчас её брату одному. Сколько лет Маше?

**Ответ: 26 лет.**

**Решение.** Пусть брату Маши n лет. Тогда Маша старше его на n-2 года, значит, ей
2n-2 года. Тринадцать лет назад брату Маши было n-13 лет, а самой Маше было 2n - 15 лет. Тогда

(n − 13) + (2n − 15) = n;

3n − 28 = n;

2n = 28;

n = 14.

Тогда Маше 2n - 2 = 26 лет.

**Критерии:**

**6 б.** В верном решении допущена арифметическая ошибка.

**2 б.** Приведён верный ответ, но: либо отсутствует обоснование, либо неверное обоснование, либо ответ получен при рассмотрении частного случая.

**0 б.** Неверное понимание условия и решение другой задачи.

**Задача 2.** Существует ли 19-значное число, у которого сумма цифр равна произведению цифр?

**Ответ: да, существует.**

**Решение.** Есть много разных примеров. Приведем один из них: число, состоящее из одной тройки, трёх двоек и пятнадцати единиц. Сумма его цифр равна

1 · 3 + 3 · 2 + 15 · 1 = 3 + 6 + 15 = 24.

Произведение его цифр есть

3 · 2 · 2 · 2 · 1 · 1 · … · 1= 3 · 8 = 24

**Критерии:**

**7 б.** Приведён любой, удовлетворяющий условию задачи, пример.

**0 б.** Задача не решена или решена неверно.

**Задача 3.** Правильный треугольник со стороной длины 4 разбит параллельными сторонам линиями на 16 маленьких треугольников со стороной длины 1, как показано на рисунке:

За ход разрешается стереть любую одну сторону у любого из маленьких треугольников. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы у каждого маленького треугольника была стёрта по меньшей мере одна сторона?

**Ответ: за 10 ходов.**

**Решение.** Это задача типа «оценка + пример». То есть решение состоит из двух частей: оценка, доказывающая, что не может быть меньше определенного числа ходов и пример, доказывающий, что полученная оценка достигается.

*Оценка:* можно заметить, что есть два вида маленьких треугольников: 10 треугольников, направленных «острием вверх» и 6 треугольников, направленных «острием вниз». У каждого треугольника первого вида должна быть стёрта по крайней мере одна из сторон, причём общих сторон у них нет. Значит, нужно стереть не менее 10 сторон.

*Пример:* заметим, что если у каждого треугольника первого вида стереть нижнюю сторону, то у каждого треугольника второго вида окажется стёрта верхняя сторона. Т.е. цель можно достигнуть ровно за 10 ходов.

**Критерии**

**5 б.** Доказано, что необходимо стереть хотя бы 10 сторон, но не приведен пример, как это можно сделать.

**2 б.** Приведён пример, как можно стереть 10 сторон, чтобы выполнялось условие задачи, но либо отсутствует, либо приведено неверное обоснование, что меньшим числом «стираний» обойтись не удастся.

**1 б.** Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование либо оно неверно.

**0 б.** Задача не решена или решена неверно.

**Пояснения**

**1.** Возможны попытки решения, в которых просто утверждается, что можно выделить не более 6 непересекающихся пар треугольников с общей стороной. Они не являются оценкой, поскольку это нужно доказывать, а не просто сформулировать.

**2.** Возможны попытки решения, в которых рассматривается определенный алгоритм получения «лучших ходов». Они так же не являются оценкой, поскольку никак не объясняют почему нет другого алгоритма, более лучшего.

**Задача 4.** На доске записаны числа 1, 2, . . . , n. Затем одно из чисел стёрли, после чего оказалось, что сумма всех оставшихся чисел равна 100. Какое число стёрли?

**Ответ: 5.**

**Решение.** Предположим, n < 14. Тогда сумма первых n натуральных чисел не превосходит

13 + 12 + . . . + 1 = (13 + 1) + (12 + 2) + . . . + (8 + 6) + 7 = 6 · 14 + 7 = 91 < 100.

Предположим, n > 14. Тогда даже после удаления одного из чисел сумма оставшихся не может оказаться меньше, чем сумма первых 14 натуральных чисел

14 + 13 + . . . + 1 = (14 + 1) + (13 + 2) + . . . + (8 + 7) = 7 · 15 = 105 > 100.

Значит, n = 14. До удаления одного из чисел сумма всех была равна 105, значит, стёрли число 5.

**Критерии**

Решение разбивается на 3 части. Баллы за каждую часть решения суммировались:

**3 б.** Доказано, что n > 13.

**3 б.** Доказано, что n < 15.

**1 б.** Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

**Пояснения**

**1.** Возможны попытки решения, в которых доказывается, что n = 15 не подходит, а про большие n либо ничего не говорится, либо недостаточно обоснованно. В таких случаях ставится 1 балл из 3 за эту часть решения.

**2.** Возможны попытки решения, в которых утверждение сформулировано, но не доказано. В этих случаях ставится 0 баллов из 3 за эту часть решения.

**Задача 5.** Точка M является серединой стороны CD квадрата ABCD. Из вершины B опустили перпендикуляр BH на прямую AM. Докажите, что прямая AM параллельна биссектрисе угла BCH.

**Решение.** В этой задаче, как часто бывает, решений несколько. Мы приведем одно из них.

Обозначим биссектрису угла BCH через CL, а угол CBM через α (рис. 1). Заметим, что треугольники CBM и DAM равны по 2 сторонам (AD = BC и CM = DM) и углу между ними, поэтому ∠DAM = ∠CBM = α.

Пусть N — середина стороны AB. Тогда MN параллельно BC и AD. Отсюда ∠BMN = ∠MBC = α и ∠AMN = ∠MAD = α, откуда ∠BMA = 2α.

Заметим, что противоположные углы H и C четырёхугольника BHMC прямые, поэтому этот четырёхугольник вписанный. В нем углы, опирающиеся на равные хорды, равны: ∠CHM = ∠CBM = α и ∠BCH = ∠BMH = 2α.

Так как CL – биссектриса угла BCH, то ∠LCH = α. Ранее доказали, что ∠CHM = α, откуда CL || HM, что и требовалось доказать

**Критерии**

**5 б.** В целом верное решение, в котором некоторые переходы недостаточно обоснованы.

**0 б.** В решении есть недоказанное утверждение, которое существенно используется.

**Задача 6.** В каждой клетке доски 4 x 4 сидит жук. Некто хлопнул в ладоши, и каждый жук в панике перебежал в одну из соседних по стороне клеток доски. Какое наибольшее число пустых клеток могло при этом получиться?

**Ответ: 10.**

**Решение.** *Оценка*: раскрасим клетки доски в шахматном порядке. Заметим, что жуки с чёрных клеток перебегают на белые, а жуки с белых клеток — на чёрные. Выделим следующие три клетки доски:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | C |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  | C |
| C |  |  |  |

Заметим, что выделенные жуки окажутся на чёрных клетках, причем никакие два выделенных жука не могут попасть на одну и ту же чёрную клетку. Значит, по меньшей мере три чёрные клетки окажутся заняты. По аналогичным соображениям по меньшей мере три белых клетки окажутся заняты. Значит, свободно будет не более 10 клеток.

*Пример*: теперь покажем, как добиться того, чтобы десять клеток доски остались свободными. Для этого выделим следующие шесть клеток доски:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| *×* | *×* | *×* | *×* |
|  |  |  |  |
|  | *×* | *×* |  |

Рядом с каждой клеткой доски есть по меньшей мере одна выделенная, поэтому каждый жук может перебежать в одну из выделенных клеток. После этого все жуки окажутся на выделенных клетках, а остальные 10 клеток останутся свободны.

**Критерии**

**5 б.** Доказано, что свободно будет не более 10 клеток, но нет примера.

**4 б.** Есть пример и в оценке присутствует идея раскраски в шахматном порядке, но нет дальнейшего полного обоснования.

**2 б.** Приведён пример, как добиться того, чтобы 10 клеток доски остались свободными, но оценка отсутствует или не верна.

**0 б.** Задача не решена или решена неверно.

**Пояснения**

**1.** Возможны попытки решения, в которых организован перебор всех вариантов расположения непустых клеток.

Если перебор полный и обоснованный, то это верное решение и ставится полный балл.

Если пропущен хотя бы один случай или хотя бы в одном случае нет пояснений, то это сразу НЕверное решение и ставится 0 баллов за оценку. Поскольку именно в этом случае возможен более лучший пример. Возможно получение 2 баллов за пример.

**2.** Возможны попытки решения, в которых оценка опирается на определенный алгоритм построения примера. Такая оценка не верна, поскольку это не гарантирует нам отсутствие другого алгоритма с более лучшим ответом. В этих случаях ставится 0 баллов за оценку. Возможно получение 2 баллов за пример.