Всероссийская олимпиада школьников. Школьный этап 2021/22 уч.г.
Математика, 9 класс, решения

Время выполнения 90 мин. Максимальное кол-во баллов - 35

Вариант 1. Все задания по 7 баллов.

Критерии оценивания заданий.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям.

9.1. У первого треугольника длины сторон $a;\ 3;\ 5$, у второго длины сторон $b;\ 3;\ 5$. Какому наименьшему числу не может равняться $|a-b|$?
Ответ. 6.
Решение. $5-3<a,b<3+5$, то есть $2<a,b<8$. Отсюда $|a-b|<8-2=6$.
Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. При отсутствии решения есть идея использовать неравенство треугольника – 2 балла. Рассмотрены только примеры – 1 балл.*

9.2. В группе школьников 27 мальчиков, из них у 9 фамилия начинается на согласную букву, а у двоих из таких мальчиков имя начинается на букву «Д». Всего в группе фамилия начинается на согласную букву у 17 человек, а имя начинается на букву «Д» у 3 из них. Среди всех имя начинается на букву «Д» у 14 школьников, из них 11 мальчиков. Сколько школьников в данной группе?
Ответ. 37.
Решение. Сложим число мальчиков, число школьников, фамилия которых начинается на согласную букву, и число школьников, имя которых начинается на букву «Д». Получим $27+17+14$. Но при этом мы дважды посчитали тех, кто удовлетворяет двум из этих условий, надо вычесть их число: $27+17+14-(9+3+11)$. Те, кто удовлетворяет трём условиям (мальчики с фамилией на согласную букву и с именем на «Д»), были трижды посчитаны и трижды вычтены, их число надо прибавить. Окончательно получаем:
$$27+17+14-(9+3+11)+2=37.$$
Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Верный ответ получен подбором чисел, удовлетворяющих условию, но не показано, что другие ответы невозможны – 3 балла. При верном ходе решения допущены ошибки в вычислениях – снимать 2 балла за ошибку. Решение верно начато, но нет существенного продвижения*

– 1 балл. Есть продвижение, но решение не доведено до конца – 3 балла. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

9.3. График квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ проходит через точки $(p, 25)$ и $(q, 100)$. Числа a, b, c, p, q – целые. Сколько различных значений может принимать разность $q - p$?

Ответ. 12.

Решение. $aq^2 + bq + c = 100$, $ap^2 + bp + c = 25$. Вычитая из первого соотношения второе, получаем $a(q^2 - p^2) + b(q - p) = 75$, то есть $(q - p)(aq + ap + b) = 75$. Поскольку $75 = 3 \cdot 5^2$, $q - p$ должно равняться $\pm 3^\alpha \cdot 5^\beta$, где α может принимать значения 0; 1, и β может принимать значения 0; 1; 2. Всего получается $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ значений.

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Получено только равенство* $(q - p)(aq + ap + b) = 75$ *– 3 балла. Число 75 разложено на множители – 1 балл. Подсчитано число вариантов – 3 балла. Баллы суммируются. При верном ходе решения допущены ошибки в преобразованиях – снимать 2 балла за ошибку. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

9.4. Найдите геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению

$$|3x + 2y - x^2 - y^2| = 2.$$

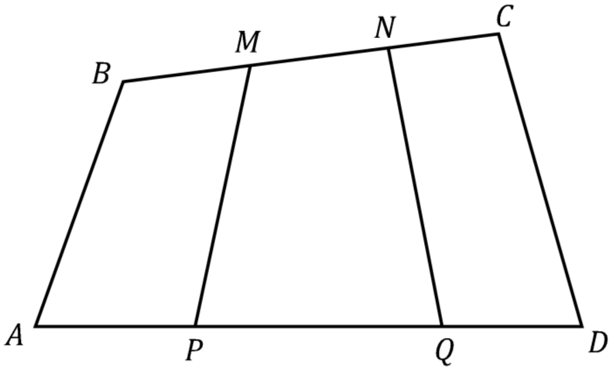
Ответ. Две концентрические окружности с центрами в точке $\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ и радиусами $\frac{\sqrt{21}}{2}$ и $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Решение. $|3x + 2y - x^2 - y^2| = |x^2 + y^2 - 3x - 2y| = \left|\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 - \frac{13}{4}\right| = 2.$

Раскрывая модуль, получим $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{21}{4}$, или $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{4}$.

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Найдена только одна окружность – 4 балла. Только выделены полные квадраты – 3 балла. При верном ходе решения допущены ошибки в преобразованиях – снимать 2 балла за ошибку. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

9.5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ площадью 10. На сторонах BC и AD отмечены точки M, N и P, Q (см. рисунок). При этом $\frac{BM}{BC} = \frac{QD}{AD} = \frac{1}{4}$, $\frac{CN}{BC} = \frac{AP}{AD} = \frac{2}{5}$. Определить площадь четырехугольника $MNQP$.



Ответ. 3,5.

Решение. Рассмотрим треугольники ABC и AMC. У них общая высота, проведенная из вершины A, поэтому их площади относятся как основания: $\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}} = \frac{MC}{BC} = \frac{3}{4}$. Аналогично, $\frac{S_{AQC}}{S_{ADC}} = \frac{AQ}{AD} = \frac{3}{4}$. Тогда и площадь четырехугольника $AMCQ$ составляет $\frac{3}{4}$ площади $ABCD$, так как $\frac{S_{AMCQ}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{AMC} + S_{AQC}}{S_{ABC} + S_{ADC}} = \frac{\frac{3}{4}(S_{ABC} + S_{ADC})}{S_{ABC} + S_{ADC}} = \frac{3}{4}$. Рассмотрим теперь треугольники MNQ и MCQ.

Их площади относятся как основания: $\frac{MN}{MC} = \frac{1-\frac{1}{4}-\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{7}{15}$. Аналогично, $\frac{S_{PQM}}{S_{AMQ}} = \frac{7}{15}$. Тогда и $\frac{S_{MNQP}}{S_{AMCQ}} = \frac{7}{15}$. Но $S_{AMCQ} = \frac{3}{4} \cdot S_{ABCD} = \frac{15}{2}$. Отсюда $S_{MNQP} = \frac{7}{15} \cdot \frac{15}{2} = 3{,}5$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. В верном доказательстве имеется не вполне очевидный и необоснованный переход – снимать 1 балл. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 2-3 балла. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

Всероссийская олимпиада школьников. Школьный этап 2021/22 уч.г.
Математика, 9 класс, решения

Время выполнения 90 мин. Максимальное кол-во баллов - 35

Вариант 2. Все задания по 7 баллов.

Критерии оценивания заданий.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

****Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям.***

9.1. У первого треугольника длины сторон $a;\ 4;\ 7$, у второго длины сторон $b;\ 4;\ 7$. Какому наименьшему числу не может равняться $|a-b|$?
Ответ. 8.
Решение. $7-4<a,b<4+7$, то есть $3<a,b<11$. Отсюда $|a-b|<11-3=8$.
Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. При отсутствии решения есть идея использовать неравенство треугольника – 2 балла. Рассмотрены только примеры – 1 балл.*

9.2. В группе школьников 25 девочек, из них у 10 фамилия начинается на гласную букву, а у одной из таких девочек имя начинается на букву «А». Всего в группе фамилия начинается на гласную букву у 20 человек, а имя начинается на букву «А» у 6 из них. Среди всех имя начинается на букву «А» у 18 школьников, из них 9 девочек. Сколько школьников в данной группе?
Ответ. 39.
Решение. Сложим число девочек, число школьников, фамилия которых начинается на гласную букву, и число школьников, имя которых начинается на букву «А». Получим $25+20+18$. Но при этом мы дважды посчитали тех, кто удовлетворяет двум из этих условий, надо вычесть их число: $25+20+18-(10+6+9)$. Те, кто удовлетворяет трём условиям (девочки с фамилией на гласную букву и с именем на «А»), были трижды посчитаны и трижды вычтены, их число надо прибавить. Окончательно получаем:
$$25+20+18-(10+6+9)+1=39.$$
Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Верный ответ получен подбором чисел, удовлетворяющих условию, но не показано, что другие ответы невозможны – 3 балла. При верном ходе решения допущены ошибки в вычислениях – снимать 2 балла за ошибку. Решение верно начато, но нет существенного продвижения*

– 1 балл. Есть продвижение, но решение не доведено до конца – 3 балла. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

9.3. График квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ проходит через точки $(p, 20)$ и $(q, 56)$. Числа a, b, c, p, q – целые. Сколько различных значений может принимать разность $q - p$?

Ответ. 18.

Решение. $aq^2 + bq + c = 56,\ ap^2 + bp + c = 20$. Вычитая из первого соотношения второе, получаем $a(q^2 - p^2) + b(q - p) = 36,$ то есть $(q - p)(aq + ap + b) = 36$. Поскольку $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $q - p$ должно равняться $\pm 2^\alpha \cdot 3^\beta$, где α и β могут принимать значения 0; 1; 2. Всего получается $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ значений.

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Получено только равенство* $(q - p)(aq + ap + b) = 36$ *– 3 балла. Число* 36 *разложено на множители – 1 балл. Подсчитано число вариантов – 3 балла. Баллы суммируются. При верном ходе решения допущены ошибки в преобразованиях – снимать 2 балла за ошибку. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

9.4. Найдите геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению

$$|5x + 4y - x^2 - y^2| = 3.$$

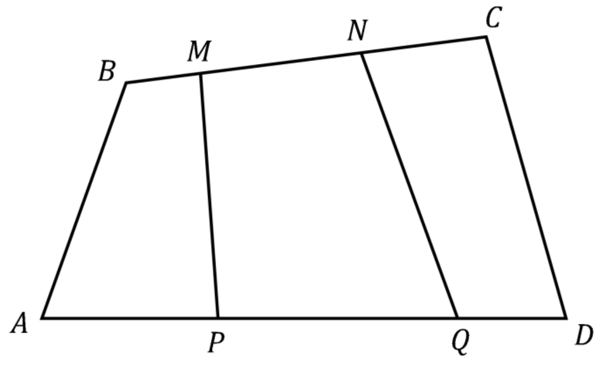
Ответ. Две концентрические окружности с центрами в точке $\left(\frac{5}{2}; 2\right)$ и радиусами $\frac{\sqrt{53}}{2}$ и $\frac{\sqrt{29}}{2}$.

Решение. $|5x + 4y - x^2 - y^2| = |x^2 + y^2 - 5x - 4y| = \left|\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 - \frac{41}{4}\right| = 3$.

Раскрывая модуль, получим $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \frac{53}{4}$, или $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \frac{29}{4}$.

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Найдена только одна окружность –* 4 *балла. Только выделены полные квадраты – 3 балла. При верном ходе решения допущены ошибки в преобразованиях – снимать 2 балла за ошибку. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

9.5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ площадью 60. На сторонах BC и AD отмечены точки M, N и P, Q (см. рисунок). При этом $\frac{BM}{BC} = \frac{QD}{AD} = \frac{1}{5}$, $\frac{CN}{BC} = \frac{AP}{AD} = \frac{1}{3}$. Определить площадь четырёхугольника $MNQP$.



Ответ. 28.

Решение. Рассмотрим треугольники ABC и AMC. У них общая высота, проведенная из вершины A, поэтому их площади относятся как основания: $\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}} = \frac{MC}{BC} = \frac{4}{5}$. Аналогично, $\frac{S_{AQC}}{S_{ADC}} = \frac{AQ}{AD} = \frac{4}{5}$. Тогда и площадь четырехугольника $AMCQ$ составляет $\frac{4}{5}$ площади $ABCD$, так как $\frac{S_{AMCQ}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{AMC} + S_{AQC}}{S_{ABC} + S_{ADC}} = \frac{\frac{4}{5} \cdot (S_{ABC} + S_{ADC})}{S_{ABC} + S_{ADC}} = \frac{4}{5}$. Рассмотрим теперь треугольники MNQ и MCQ.

Их площади относятся как основания: $\frac{MN}{MC} = \frac{1-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{7}{12}$. Аналогично, $\frac{S_{PQM}}{S_{AMQ}} = \frac{7}{12}$. Тогда и $\frac{S_{MNQP}}{S_{AMCQ}} = \frac{7}{12}$. Но $S_{AMCQ} = \frac{4}{5} \cdot S_{ABCD} = 48$. Отсюда $S_{MNQP} = \frac{7}{12} \cdot 48 = 28$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. В верном доказательстве имеется не вполне очевидный и необоснованный переход – снимать 1 балл. Рассмотрен частный случай четырёхугольника – 2 балла. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 2-3 балла. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*