Всероссийская олимпиада школьников. Школьный этап 2021/22 уч.г.
Математика, 10 класс, решения

Время выполнения 90 мин. Максимальное кол-во баллов – 35

Вариант 1. Все задания по 7 баллов.

Критерии оценивания заданий.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям.

10.1. Интернет-фирма провела акцию: «Подключи Интернет себе, приведи четверых друзей, которые также подключат Интернет, и получи стоимость подключения обратно». После окончания акции выяснилось, что 13 абонентов пришли сами, остальных привели друзья. Некоторые из них привели ровно по 4 новых абонента, а остальные 100 не привели никого. Сколько абонентов подключили Интернет бесплатно?
Ответ. 29.
Решение. Пусть каждый из x потенциальных «счастливчиков» привел по 4 друга. Тогда «приведенных» абонентов $4x$, еще 13 пришли сами, значит, всего абонентов было $13+4x$. С другой стороны, x человек привели новых абонентов, а 100 человек – не привели, то есть всего абонентов было $x+100$. Получим уравнение: $13+4x=x+100$, откуда $x=29$.
Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Уравнение составлено верно и получен верный ответ, но отсутствуют какие-либо пояснения – 5 баллов. В решении допущена арифметическая ошибка – 2 балла. Уравнение составлено неверно – 0 баллов. Приведен только ответ – 0 баллов.*

10.2. Про квадратный трехчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами известно, что $f(\sqrt{3})-f(\sqrt{2})=4$. Найдите $f(\sqrt{10})-f(\sqrt{7})$.
Ответ. 12.
Решение. Пусть $f(x)=cx^2+dx+e$. Тогда
$$f(\sqrt{3})-f(\sqrt{2})=3c+\sqrt{3}d+e-(2c+\sqrt{2}d+e)=c+d(\sqrt{3}-\sqrt{2}).$$
Это число может быть целым только при $d=0$. Значит, $f(x)=cx^2+e$ и $f(\sqrt{3})-f(\sqrt{2})=c=4$. Тогда $f(\sqrt{10})-f(\sqrt{7})=10c+e-(7c+e)=3c=12$.

Комментарий. *Приведено любое полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 6 баллов. Доказано, что d=0 – 4 балла; получено, что с=4 – 2 балла; найдено искомое значение выражения – 1 балл, баллы суммируются. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи – 1-2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

10.3. На столе лежит коллекция различных по массе камней, каждый из которых весит целое число граммов. Известно, что самый лёгкий камень коллекции весит в 71 раз меньше, чем все остальные камни вместе взятые. Также известно, что два самых лёгких камня коллекции вместе весят в 34 раза меньше, чем все остальные камни вместе взятые. Какое наименьшее число граммов может весить самый лёгкий камень?

Ответ. 35.

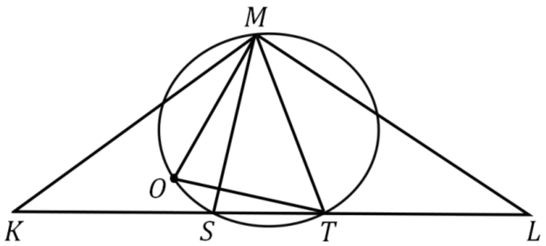
Решение. Все веса в решении выражаются в граммах. Пусть самый лёгкий камень весит m, тогда остальные камни весят $71m$, а общий суммарный вес равен $72m$. Пусть также два самых лёгких камня суммарно весят n, тогда остальные камни весят $34n$, а общий суммарный вес равен $35n$, что делится на 35. Следовательно, $72m$ делится на 35, т.е. m делится на 35, так как 72 и 35 взаимно просты. Итак, $m \geq 35$. Приведём теперь пример возможной коллекции камней, в которой $m = 35$. Два самых лёгких камня весят 72, поэтому их веса 35 и 37. Тогда остальные камни весят $71 \cdot 35 - 37 = 2448$. Для коллекции камней с различными весами 35, 37, 48, 2400 все условия выполняются: $35 \cdot 71 = 2485 = 37 + 48 + 2400$, $(35 + 37) \cdot 34 = 2448 = 48 + 2400$.

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Верно получена оценка – 4 балла, построен верный пример – 3 балла, баллы суммируются. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи – 1-2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

10.4. На стороне KL треугольника KLM с углом M, равным 108°, выбраны точки S и T (S между K и T) таким образом, что периметр треугольника MST равен длине стороны KL. Оказалось, что центр описанной окружности остроугольного треугольника KMT лежит на описанной окружности треугольника SMT. Найдите $\angle SMT$.

Ответ. 36°.

Решение. Пусть O – центр описанной окружности треугольника KMT и $\angle K = \alpha$, $\angle L = \beta$. Согласно условию, $\alpha + \beta = 180^\circ - \angle M = 72^\circ$. Из вписанного четырехугольника $MOST$ получаем $\angle MST = \angle MOT$, а последний угол равен 2α как центральный.



Тогда $\angle KMS = \angle MST - \angle K = 2\alpha - \alpha = \alpha$. Таким образом, треугольник KMS равнобедренный, $KS = MS$. С другой стороны, из условия сразу следует, что $KS + LT = MS + MT$, а значит, $LT = MT$, то есть $\angle LMT = \angle L = \beta$. Окончательно, $\angle SMT = 108^\circ - (\alpha + \beta) = 36^\circ$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. В верном решении имеются не вполне очевидные и необоснованные переходы – 5-6 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 2-3 балла. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

10.5. По окружности расставили 268 целых чисел. Оказалось, что сумма любых 20 подряд идущих чисел равна 75. Число 3 располагается на позиции 17, число 4 – на позиции 83, число 9 – на позиции 144. Найдите число, которое располагается на позиции 210.

Ответ. -1.

Решение. Заметим, что поскольку сумма любых 20 последовательных чисел постоянна, то числа, отстоящие друг от друга на 20 позиций, равны между собой. Поскольку $268 = 20 \cdot 13 + 8$, то, «прибавляя» каждый раз по 20, получим, что числа, отстоящие друг от друга на 8, также равны между собой. Далее, аналогично используя $268 = 8 \cdot 33 + 4$, получим, что числа, отстоящие друг от друга на 4, равны между собой. Таким образом, числа, порядковые номера которых дают один остаток при делении на 4, равны между собой. Теперь рассмотрим произвольные 20 последовательных чисел. Они состоят из 5 «блоков» длины 4, содержащих все числа. Таким образом, сумма этих четырех чисел равна $75: 5 = 15$. Заметим, что числа 17, 83, 144 и 210 имеют различные остатки при делении на 4, поэтому на этих позициях стоят различные числа. Таким образом, на 210-м месте стоит число $15 - (4 + 3 + 9) = -1$.

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 5-6 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 2-3 балла. Приведен только верный ответ – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

Всероссийская олимпиада школьников. Школьный этап 2021/22 уч.г.
Математика, 10 класс, решения

Время выполнения 90 мин. Максимальное кол-во баллов – 35

Вариант 2. Все задания по 7 баллов.

Критерии оценивания заданий.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

***Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям.**

10.1. Интернет-фирма провела акцию: «Подключи Интернет себе, приведи четверых друзей, которые также подключат Интернет, и получи стоимость подключения обратно». После окончания акции выяснилось, что 15 абонентов пришли сами, остальных привели друзья. Некоторые из них привели ровно по 4 новых абонента, а остальные 120 не привели никого. Сколько абонентов подключили Интернет бесплатно?
Ответ. 35.
Решение. Пусть каждый из x потенциальных «счастливчиков» привел по 4 друга. Тогда «приведенных» абонентов $4x$, еще 15 пришли сами, значит, всего абонентов было $15 + 4x$. С другой стороны, x человек привели новых абонентов, а 120 человек – не привели, то есть всего абонентов было $x + 120$. Получим уравнение: $15 + 4x = x + 120$, откуда $x = 35$.
Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Уравнение составлено верно и получен верный ответ, но отсутствуют какие-либо пояснения – 5 баллов. В решении допущена арифметическая ошибка – 2 балла. Уравнение составлено неверно – 0 баллов. Приведен только ответ – 0 баллов.*

10.2. Про квадратный трехчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами известно, что $f(\sqrt{5}) - f(\sqrt{3}) = 6$. Найдите $f(\sqrt{13}) - f(\sqrt{10})$.
Ответ. 9.
Решение. Пусть $f(x) = cx^2 + dx + e$. Тогда
$$f(\sqrt{5}) - f(\sqrt{3}) = 5c + \sqrt{5}d + e - (3c + \sqrt{3}d + e) = 2c + d(\sqrt{5} - \sqrt{3}).$$
Это число может быть целым только при $d = 0$. Значит, $f(x) = cx^2 + e$ и $f(\sqrt{5}) - f(\sqrt{3}) = 2c = 6$, отсюда $c = 3$. Тогда $f(\sqrt{13}) - f(\sqrt{10}) = 13c + e - (10c + e) = 3c = 9$.

Комментарий. *Приведено любое полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 6 баллов. Доказано, что d=0 – 4 балла; получено, что с=3 – 2 балла; найдено искомое значение выражения – 1 балл, баллы суммируются. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи – 1-2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

10.3. На столе лежит коллекция различных по массе камней, каждый из которых весит целое число граммов. Известно, что самый лёгкий камень коллекции весит в 71 раз меньше, чем все остальные камни вместе взятые. Также известно, что два самых лёгких камня коллекции вместе весят в 30 раз меньше, чем все остальные камни вместе взятые. Какое наименьшее число граммов может весить самый лёгкий камень?

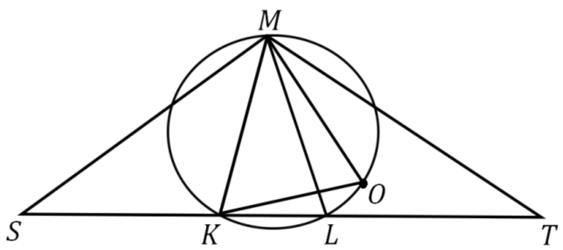
Ответ. 31.

Решение. Все веса в решении выражаются в граммах. Пусть самый лёгкий камень весит m, тогда остальные камни весят $71m$, а общий суммарный вес равен $72m$. Пусть также два самых лёгких камня суммарно весят n, тогда остальные камни весят $30n$, а общий суммарный вес равен $31n$, что делится на 31. Следовательно, $72m$ делится на 31, т.е. m делится на 31, так как 72 и 31 взаимно просты. Итак, $m \geq 31$. Приведём теперь пример возможной коллекции камней, в которой $m = 31$. Два самых лёгких камня весят 72, поэтому их веса 31 и 41. Тогда остальные камни весят $71 \cdot 31 - 41 = 2160$. Для коллекции камней с различными весами 31, 41, 60, 2100 все условия выполняются: $31 \cdot 71 = 2201 = 41 + 60 + 2100$, $(31 + 41) \cdot 30 = 2160 = 60 + 2100$.

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Верно получена оценка – 4 балла, построен верный пример – 3 балла, баллы суммируются. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи – 1-2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

10.4. В треугольнике KLM угол M равен 46°. На продолжении стороны KL за точку K выбрана точка S, а на продолжении KL за точку L – точка T так, что длина отрезка ST равна периметру треугольника KLM. Оказалось, что центр описанной окружности остроугольного треугольника KMT лежит на описанной окружности треугольника KLM. Найдите $\angle SMT$.

Ответ. 113°.



Решение. Пусть O – центр описанной окружности треугольника KMT и $\angle K = \alpha$, $\angle L = \beta$. Согласно условию, $\alpha + \beta = 180^\circ - \angle M = 134^\circ$. Из вписанного четырехугольника $MOLK$ получаем $\angle MLK = \angle MOK$, тогда $\angle MTK = \frac{\beta}{2}$ (вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу, что и вписанный угол). Тогда $\angle TML = \angle MLK - \angle T = \beta - \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2}$. Таким образом, треугольник MLT равнобедренный, $LT = LM$. С другой стороны, из условия сразу следует, что $KS + LT = KM + LM$, а значит, $KS = KM$, то есть $\angle KMS = \angle S = \frac{\alpha}{2}$. Окончательно, $\angle SMT = 46^\circ + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 46^\circ + \frac{134^\circ}{2} = 113^\circ$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. В верном решении имеются не вполне очевидные и необоснованные переходы – 5-6 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 2-3 балла. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

10.5. По окружности расставили 308 целых чисел. Оказалось, что сумма любых 20 подряд идущих чисел равна 65. Число 7 располагается на позиции 61, число 3 – на позиции 103, число 6 – на позиции 204. Найдите число, которое располагается на позиции 10.

Ответ. -3.

Решение. Заметим, что поскольку сумма любых 20 последовательных чисел постоянна, то числа, отстоящие друг от друга на 20 позиций, равны между собой. Поскольку $308 = 20 \cdot 15 + 8$, то, «прибавляя» каждый раз по 20, получим, что числа, отстоящие друг от друга на 8, также равны между собой. Далее, аналогично используя $308 = 8 \cdot 38 + 4$, получим, что числа, отстоящие друг от друга на 4, равны между собой. Таким образом, числа, порядковые номера которых дают один остаток при делении на 4, равны между собой. Теперь рассмотрим произвольные 20 последовательных чисел. Они состоят из 5 «блоков» длины 4, содержащих все числа. Таким образом, сумма этих четырех чисел равна $65: 5 = 13$. Заметим, что числа 61, 103, 204 и 10 имеют различные остатки при делении на 4, поэтому на этих позициях стоят различные числа. Таким образом, на 10-м месте стоит число $13 - (7 + 3 + 6) = -3$.

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 5-6 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 2-3 балла. Приведен только верный ответ – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*