Всероссийская олимпиада школьников. Школьный этап 2021/22 уч.г.
Математика, 11 класс, решения

Время выполнения 90 мин. Максимальное кол-во баллов - 35

Вариант 1. Все задания по 7 баллов.

Критерии оценивания заданий.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

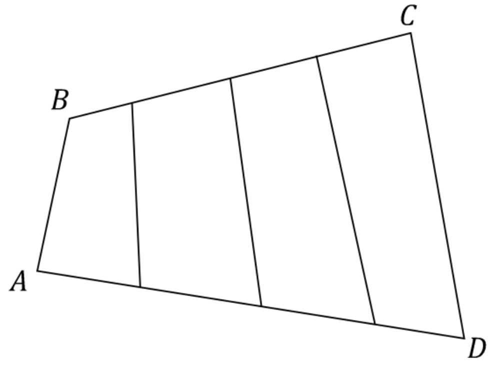
Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям.

11.1. Сколько точек с целыми координатами лежит на графике функции $y=\frac{x+11}{2x-3}$?
Ответ. 6.
Решение. Поскольку $x+11$ делится на $2x-3$, то и $2x+22$ делится на $2x-3$. Но $\frac{2x+22}{2x-3}=1+\frac{25}{2x-3}$. Значит, $2x-3$ должно быть делителем числа 25, то есть принимать значения из множества $(\pm1,\ \pm5,\ \pm25)$, всего 6 значений. Поскольку все делители нечётны, $2x-3$ равно нечётному числу, значит, x – целое число, и все значения допустимы.
Замечание. Точки с целыми координатами:
$$(2;13),(1;-12),(4;3),(-1;-2),(14;1),(-11;0).$$
Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Полный ответ получен подбором чисел, удовлетворяющих условию, но не показано, что другие ответы невозможны – 3 балла. Подбором найдено меньше 3 точек – 1 балл, 3 или больше точек – 2 балла. При верном ходе решения допущены ошибки в преобразованиях – снимать 2 балла за ошибку. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

11.2. В круге центральные углы $\alpha,\beta,\alpha+\beta$ опираются соответственно на хорды длины 3, 5, 7 см, при этом $\alpha+\beta<\pi$. Найдите $\cos\alpha$.
Ответ. $\frac{71}{98}$.
Решение. Проведем из центра окружности три радиуса так, чтобы образовались углы $\alpha,\beta,\alpha+\beta$, и соединим концы радиусов на окружности. Вписанный угол, опирающийся на хорду длины 3, равен $\frac{\alpha}{2}$. По теореме косинусов $9=25+49-70\cos\frac{\alpha}{2}$, откуда $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{65}{70}=\frac{13}{14}$. Отсюда $\cos\alpha=2\left(\frac{13}{14}\right)^2-1=\frac{142}{196}=\frac{71}{98}$.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Найден только* $\cos\frac{\alpha}{2}$ *– 4 балла. При верном ходе решения за ошибку в формуле снимать 3 балла, за ошибку в*

преобразовании снимать 2 балла. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.

11.3. В четырёхугольнике $ABCD$ каждая из противоположных сторон BC и AD разделена на 4 равные части, и точки деления соединены, как показано на рисунке. Площадь самой левой части равна 5, площадь самой правой части равна 14. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.



Ответ. 38.

Решение. Обозначим точки деления B_1, B_2, B_3 на отрезке BC и A_1, A_2, A_3 на отрезке AD. Продлим BC и AD до пересечения в точке O. Пусть $OB = x$, $OA = y$, равные отрезки, на которые разделена сторона BC, обозначим z, равные отрезки, на которые разделена сторона AD, обозначим t, $\frac{\sin\angle AOB}{2}$ обозначим k. Тогда площадь четырёхугольника ABB_1A_1 равна$(x+z)(y+t)\cdot k - xy\cdot k = 5$, площадь четырёхугольника B_3CDA_3 равна $(x+4z)(y+4t)\cdot k-(x+3z)(y+3t)\cdot k = 14$. После упрощения получаем: $(zy+xt+tz)\cdot k = 5$, $(zy+xt+7tz)\cdot k = 14,$ откуда $5+6tz\cdot k = 14$, $tz\cdot k = \frac{3}{2}$. Площадь четырёхугольника $ABCD$ равна

$$(x+4z)(y+4t)\cdot k - xy\cdot k = 4(zy+xt+tz)\cdot k + 12tz\cdot k = 4\cdot 5 + 12\cdot\frac{3}{2} = 38.$$

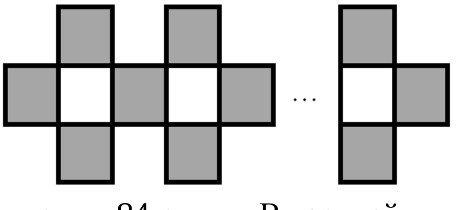
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. В верном решении использованы не вполне очевидные и необоснованные утверждения – 4 балла. Рассмотрен частный случай четырёхугольника – 2 балла. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 2-3 балла. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

11.4. Аня нарисовала фигуру. Оказалось, что фигуру можно разбить на 333 одинаковых квадрата, и раскрасить квадраты в два цвета (синий и белый) так, чтобы соседние квадраты были разного цвета. Каково максимальное число синих квадратов?

Ответ. 250.

Решение. ***Оценка.*** Поскольку нет изолированных квадратов, существует не менее 332 сторон, принадлежащих двум соседним квадратам (разного цвета). Будем называть такие стороны смежными. У каждого квадрата не более 4 смежных сторон. Обозначим число белых квадратов k. Итак, число смежных сторон не менее 332 и не более $4k$, откуда $4k \geq 332$, то есть $k \geq 83$. Тогда число синих квадратов не больше $333 - 83 = 250$.

Пример.



В средней полоске 83 белых клетки, 84 синих. В верхней и нижней полосках по 83 синих клетки. Всего синих клеток $84 + 83 + 83 = 250$.

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Верно получена оценка – 4 балла, построен верный пример – 3 балла, баллы суммируются. Если в примере только нарисована фигура, но не указаны размеры – снять 1 балл.*

11.5. Миша выбирает два разных числа от 1 до 100. Какова вероятность, что одно из этих чисел имеет ровно 3 делителя, а другое – ровно 4?

Ответ. $\frac{64}{2475}$.

Решение. Три делителя имеют квадраты простых чисел, в ряду от 1 до 100 их четыре: 4, ре: $4,\ 9,\ 25,\ 49$. Вероятность выбрать такое число первым равна 0,04. Четыре делителя имеют числа вида p^3, где p – простое (таких чисел два: 8 и 27), и числа вида pq, где p и q – различные простые числа. Если $p = 2$, то q может принимать 14 значений, от 3 до 47. При $p = 3$ q может принимать 9 значений, от 5 до 31. При $p = 5$ q может принимать 5 значений, при $p = 7$ q может принимать 2 значения. Всего количество чисел вида pq $14 + 9 + 5 + 2 = 30$. С учётом чисел вида p^3 получается, что вероятность выбрать вторым число с 4 делителями равна $\frac{32}{99}$. Искомая вероятность равна $2 \cdot \frac{4 \cdot 32}{100 \cdot 99} = \frac{64}{2475}$.

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Баллы раскладываются так: найдено количество чисел, имеющих ровно 3 делителя – 1 балл. Найдено количество чисел вида p^3 – 2 балла. Найдено количество чисел вида pq – 2 балла. Найдена вероятность – 2 балла. При вычислении вероятности ответ в 2 раза меньше – 1 балл вместо 2. Решение в целом верное, но пропущены 1-2 числа – снять 1 балл, пропущено больше 2 чисел – снять 2 балла. Решение отсутствует – 0 баллов.*

Всероссийская олимпиада школьников. Школьный этап 2021/22 уч.г.
Математика, 11 класс, решения

Время выполнения 90 мин. Максимальное кол-во баллов - 35

Вариант 2. Все задания по 7 баллов.

Критерии оценивания заданий.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

****Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям.***

11.1. Сколько точек с целыми координатами лежит на графике функции $y=\frac{x+12}{2x+3}$?

Ответ. 8.

Решение. Поскольку $x+12$ делится на $2x+3$, то и $2x+24$ делится на $2x+3$. Но $\frac{2x+24}{2x+3}=1+\frac{21}{2x+3}$. Значит, $2x+3$ должно быть делителем числа 21, то есть принимать значения из множества $(\pm1,\ \pm3,\ \pm7,\ \pm21)$, всего 8 значений. Поскольку все делители нечётны, $2x+3$ равно нечётному числу, значит, x – целое число, и все значения допустимы.

Замечание. Точки с целыми координатами:

$$(-1;11),(-2;-10),(0;4),(-3;-3),(2;2),\ (-5;-1),(9;1),(-12;0).$$

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Полный ответ получен подбором чисел, удовлетворяющих условию, но не показано, что другие ответы невозможны – 3 балла. Подбором найдено меньше 3 точек – 1 балл, 3 или больше точек – 2 балла. При верном ходе решения допущены ошибки в преобразованиях – снимать 2 балла за ошибку. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

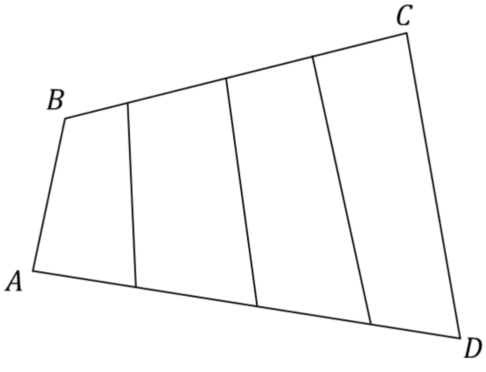
11.2. В круге центральные углы $\alpha,\beta,\alpha+\beta$ опираются соответственно на хорды длины 4, 6, 8 см, при этом $\alpha+\beta<\pi$. Найдите $\cos\alpha$.

Ответ. $\frac{17}{32}$.

Решение. Проведем из центра окружности три радиуса так, чтобы образовались углы $\alpha,\beta,\alpha+\beta$, и соединим концы радиусов на окружности. Вписанный угол, опирающийся на хорду длины 4, равен $\frac{\alpha}{2}$. По теореме косинусов $16=36+64-96\cos\frac{\alpha}{2}$, откуда $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{84}{96}=\frac{7}{8}$. Отсюда $\cos\alpha=2\left(\frac{7}{8}\right)^2-1=\frac{34}{64}=\frac{17}{32}$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Найден только* $\cos\frac{\alpha}{2}$ *– 4 балла. При верном ходе решения за ошибку в формуле снимать 3 балла, за ошибку в* *преобразовании снимать 2 балла за ошибку. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

11.3. В четырёхугольнике $ABCD$ каждая из противоположных сторон BC и AD разделена на 4 равные части, и точки деления соединены, как показано на рисунке. Площадь самой левой части равна 7, площадь самой правой части равна 16. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.



Ответ. 46.

Решение. Обозначим точки деления B_1, B_2, B_3 на отрезке BC и A_1, A_2, A_3 на отрезке AD. Продлим BC и AD до пересечения в точке O. Пусть $OB = x, OA = y,$ равные отрезки, на которые разделена сторона BC, обозначим z, равные отрезки, на которые разделена сторона AD, обозначим t, $\frac{\sin\angle AOB}{2}$ обозначим k. Тогда площадь четырёхугольника ABB_1A_1 равна $(x+z)(y+t)\cdot k - xy\cdot k = 7$, площадь четырёхугольника B_3CDA_3 равна $(x+4z)(y+4t)\cdot k-(x+3z)(y+3t)\cdot k = 16$. После упрощения получаем: $(zy+xt+tz)\cdot k = 7$, $(zy+xt+7tz)\cdot k = 16,$ откуда $7+6tz\cdot k = 16$, $tz\cdot k = \frac{3}{2}$.

Площадь четырёхугольника $ABCD$ равна

$$(x+4z)(y+4t)\cdot k - xy\cdot k = 4(zy+xt+tz)\cdot k + 12tz\cdot k = 4\cdot 7 + 12\cdot\frac{3}{2} = 46.$$

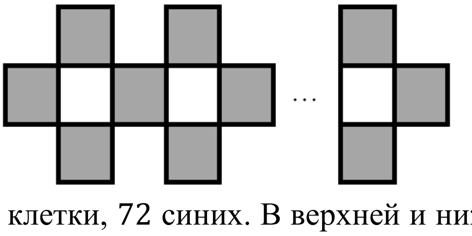
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. В верном решении использованы не вполне очевидные и необоснованные утверждения – 4 балла. Рассмотрен частный случай четырёхугольника – 2 балла. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 2-3 балла. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

11.4. Фигура такова, что её можно разбить на 285 одинаковых квадратов, и раскрасить квадраты в два цвета (серый и белый) так, чтобы соседние квадраты были разного цвета. Каково максимальное число серых квадратов?

Ответ. 214.

Решение. *Оценка.* Поскольку нет изолированных квадратов, существует не менее 284 сторон, принадлежащих двум соседним квадратам (разного цвета). Будем называть такие стороны смежными. У каждого квадрата не более 4 смежных сторон. Обозначим число белых квадратов k. Итак, число смежных сторон не менее 284 и не более $4k$, откуда $4k \geq 284$, то есть $k \geq 71$. Тогда число серых квадратов не больше $285 - 71 = 214$.

Пример.



В средней полоске 71 белых клетки, 72 синих. В верхней и нижней полосках по 71 синей клетке. Всего синих клеток $72 + 71 + 71 = 214$.

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Верно получена оценка – 4 балла, построен верный пример – 3 балла, баллы суммируются. Если в примере только нарисована фигура, но не указаны размеры – снять 1 балл.*

11.5. Коля выбирает два различных числа от 100 до 150. Какова вероятность, что одно из этих чисел имеет ровно 3 делителя, а другое – ровно 4?

Ответ. $\frac{16}{1275}$.

Решение. Три делителя имеют квадраты простых чисел, в ряду от 100 до 150 такое число одно: 121. Вероятность выбрать такое число первым равна $\frac{1}{51}$. Четыре делителя имеют числа вида p^3, где p – простое (такое число тоже одно: 125), и числа вида pq, где p и q – различные простые числа. Если $p = 2$, то q может принимать значения $53, 59, 61, 67, 71, 73$. При $p = 3$ q может принимать значения $37, 41, 43, 47$. При $p = 5$ q может принимать значения 23 и 29, при $p = 7$ q может принимать значения 17 и 19, при $p = 11$ q может принимать значение 13. Всего чисел вида pq: $6 + 4 + 2 + 2 + 1 = 15$. С учётом чисел вида p^3 получается, что вероятность выбрать вторым число с 4 делителями равна $\frac{16}{50}$. Искомая вероятность равна $2 \cdot \frac{16}{51 \cdot 50} = \frac{16}{1275}$.

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Баллы раскладываются так: найдено количество чисел, имеющих ровно 3 делителя – 1 балл. Найдено количество чисел вида p^3 – 2 балла. Найдено количество чисел вида pq – 2 балла. Найдена вероятность – 2 балла. При вычислении вероятности ответ в 2 раза меньше – 1 балл вместо 2. Решение в целом верное, но пропущены 1-2 числа – снять 1 балл, пропущено больше 2 чисел – снять 2 балла. Решение отсутствует – 0 баллов.*