Всероссийская олимпиада школьников. Школьный этап 2021/22 уч.г.
Математика, 7 класс, решения

Время выполнения 90 мин. Максимальное кол-во баллов – 35

Вариант 1. Все задания по 7 баллов.

Критерии оценивания заданий.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

****Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям.***

7.1. В книге a иллюстраций. 8 цветных иллюстраций составляют $2a\%$ от общего числа иллюстраций. Сколько всего иллюстраций в книге?
Ответ. 20.
Решение. $a \cdot \frac{2a}{100} = 8,\ a = 20.$
Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Уравнение составлено верно, но решение не доведено до конца – 3 балла. При верном ходе решения допущены ошибки в вычислениях – снимать 2 балла за ошибку. Приведён только ответ – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

7.2. Робот может передвигаться только по вершинам треугольника ABC, не заходя два раза в одну вершину. Разность между длинами двух путей из A в B равна 15 метрам, а разность между длинами двух путей из C в B равна 8 метрам. Найдите длину стороны AC.
Ответ. 11,5.
Решение. По условию $AC + CB - AB = 15,\ AC + AB - CB = 8.$ Складывая равенства, получаем $2AC = 23$ (м), откуда $AC = 11{,}5$ (м).
Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Равенства записаны верно, но решение не доведено до конца – 3 балла. При верном ходе решения допущены ошибки в вычислениях – снимать 2 балла за ошибку. Решение начато, но без особого продвижения – 1 балл. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

7.3. На дереве сидели синицы и воробьи, воробьев было в полтора раза больше, чем синиц. Некоторые синицы улетели, среди оставшихся птичек синицы составляли пятую часть. Какая часть синиц от первоначального числа не улетела?

Ответ. $\frac{3}{8}$.
Решение. Пусть сначала было x синиц, $1{,}5x$ воробьев, и улетело y синиц. Осталось $x - y$ синиц, а всего птичек $2{,}5x - y$. По условию, $x - y = 0{,}2 \cdot (2{,}5x - y)$, или $0{,}5x = 0{,}8y$. Отсюда $y = \frac{5x}{8}$, осталось $\frac{3x}{8}$ синиц.
Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. В данном решении баллы раскладываются так: введены переменные –1 балл, составлено уравнение – 3 балла, найдено решение – 3 балла; баллы суммируются. При верном ходе решения допущены ошибки в вычислениях – снимать 2 балла за ошибку. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

7.4. Четырёх школьников зовут Степан, Фёдор, Олег, Илья, у их отцов такие же имена, но никого не зовут так же, как его отца. У Фёдора отец не Степан. Имя того, чьего отца зовут Олег, совпадает с именем отца того, кого зовут так же, как отца Ильи, и всё это разные люди. Определите имя и отчество каждого школьника.
Ответ. Фёдор Олегович, Степан Фёдорович, Илья Степанович, Олег Ильич.
Решение. Запишем последнее условие в виде таблицы. Здесь x, y – два разных имени, причем это не имена Олег и Илья (так как, если x – Илья, или y – Олег, то в таблице есть одинаковые строки, что противоречит условию). Если y – Фёдор, то x – Степан, что противоречит условию. Значит, y – Степан, x – Фёдор. Школьников зовут Фёдор Олегович, Степан Фёдорович, Илья Степанович. Среди имён не использовано имя Олег, среди отчеств – Ильич. Поэтому четвёртого школьника зовут Олег Ильич.

Имя школьника	**Имя отца**
x	Олег
y	x
Илья	y

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведён только ответ без обоснований и без записанной проверки выполнения условий – 1 балл, с проверкой – 2 балла, с частичными обоснованиями – 3 балла. Решение в целом верное, но есть пропуски – 5 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

7.5. На каждой стороне кубика написано по числу (могут быть и совпадающие числа). Вася обнаружил, что если складывать числа, написанные на трёх разных сторонах, может быть всего 20 вариантов, причём в 10 из них сумма трёх чисел равна 15, а в других 10 вариантах сумма равна 18. Какие числа могли быть написаны на сторонах кубика? Найдите все варианты и покажите, что других не может быть.
Ответ. $5, 5, 5, 5, 5, 8$ или $6, 6, 6, 6, 6, 3$.
Решение. Если среди чисел будет хотя бы четыре разных, то значений суммы будет больше двух: $a + b + c$, $a + b + d$, $a + c + d$. Если разных чисел ровно три, то какое-то, например, a, будет повторяться, и значений суммы также будет больше двух: $a + b + c$, $a + b + a$, $a + c + a$. Таким образом, может быть только два разных числа, a и b. В наборах a, a, a, a, b, b и a, a, a, b, b, b значений суммы будет больше двух: в первом случае $3a$, $2b + a$, $a + 2b$, во втором случае $3a$, $3b$, $a + 2b$, $b + 2a$.
Заметим, что никакие два значения не могут совпадать, так как $a \neq b$. Всего 2 значения может получиться только в случае, когда 5 из 6 чисел совпадают: a, a, a, a, a, b. Тогда в 10 случаях сумма будет равна $3a$, в 10 случаях равна $2a + b$. Если $3a = 15$, $2a + b = 18$, то $a = 5$, $b = 8$. Если $3a = 18$, $2a + b = 15$, то $a = 6$, $b = 3$.
Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Баллы раскладываются так: за каждый найденный вариант – 2 балла, за доказательство, что нет других вариантов – 3 балла; баллы суммируются.*

Всероссийская олимпиада школьников. Школьный этап 2021/22 уч.г.
Математика, 7 класс, решения

Время выполнения 90 мин. Максимальное кол-во баллов – 35

Вариант 2. Все задания по 7 баллов.

Критерии оценивания заданий.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

****Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям.***

7.1. У Лизы есть a тетрадей, 9 тетрадей в клеточку составляют $a\%$ от общего числа тетрадей. Сколько всего тетрадей у Лизы?
Ответ. 30.
Решение. $a \cdot \frac{a}{100} = 9,\ a = 30.$
Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Уравнение составлено верно, но решение не доведено до конца – 3 балла. При верном ходе решения допущены ошибки в вычислениях – снимать 2 балла за ошибку. Приведён только ответ – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

7.2. Три киоска расположены в вершинах треугольника ABC, между киосками проложены прямые дорожки. Разность между длинами двух путей из A в B равна 280 метрам, а разность между длинами двух путей из C в B равна 190 метрам. Найдите длину стороны AC.
Ответ. 235.
Решение. По условию $AC + CB - AB = 280$, $AC + AB - CB = 470.$ Складывая равенства, получаем $2AC = 470$ (м), откуда $AC = 235$ (м).
Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Равенства составлены верно, но решение не доведено до конца – 3 балла. При верном ходе решения допущены ошибки в вычислениях – снимать 2 балла за ошибку. Решение начато, но без особого продвижения – 1 балл. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

7.3. В музее были картины двух видов: пейзажи и натюрморты. Пейзажей было в два с половиной раза больше, чем натюрмортов. Затем некоторые пейзажи забрали на реставврацию, теперь натюрморты составили три десятых всех оставшихся картин. Какую часть от первоначального числа пейзажей забрали на реставрацию?

Ответ. $\frac{1}{15}$.

Решение. Пусть сначала было x натюрмортов, $2{,}5x$ пейзажей, и убрали y пейзажей. Осталось $2{,}5x - y$ пейзажей, а всего картин $3{,}5x - y$. По условию, $x = 0{,}3 \cdot (3{,}5x - y)$, или $x = 1{,}05x - 0{,}3y$, $0{,}05x = 0{,}3y$, $y = \frac{x}{6}$. Тогда на реставрацию забрали $\frac{x}{6} : \frac{5x}{2} = \frac{1}{15}$ от первоначального числа пейзажей.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. В данном решении баллы раскладываются так: введены переменные –1 балл, составлено уравнение – 3 балла, найдено решение – 3 балла; баллы суммируются. При верном ходе решения допущены ошибки в вычислениях – снимать 2 балла за ошибку. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

7.4. Четыре друга – математик, физик, историк, химик, у их отцов такие же специальности, но ни у кого из сыновей специальность не совпадает с отцовской. У физика отец не математик. Специальность сына историка совпадает со специальностью отца того, у кого специальность такая же, как у отца химика, и всё это разные люди. Определите специальность отца каждого друга.

Ответ. У физика отец – историк, у математика отец – физик, у химика – математик, у историка – химик.

Решение. Запишем последнее условие в виде таблицы. Здесь x, y – две разных специальности, причем это не историк и не химик (так как, если x – химик, или y – историк, то в таблице есть одинаковые строки, что противоречит условию). Если y – физик, то x – математик, что противоречит условию. Значит, y – математик, x – физик. У физика отец – историк, у математика отец – физик, у химика – математик. Четвёртому другу осталась специальность историк, а его отцу – химик.

Специальность друга	**Специальность отца**
x	историк
y	x
химик	y

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведён только ответ без обоснований и без записанной проверки выполнения условий – 1 балл, с проверкой – 2 балла, с частичными обоснованиями – 3 балла. Решение в целом верное, но есть пропуски – 5 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

7.5. На доске написано 6 чисел (могут быть и совпадающие числа). Если складывать числа по три, может быть всего 20 вариантов, причём в 10 из них сумма трёх чисел равна 18, а в других 10 вариантах сумма равна 24. Какие числа могли быть написаны на доске? Найдите все варианты и покажите, что других не может быть.

Ответ. $6, 6, 6, 6, 6, 12$ или $8, 8, 8, 8, 8, 2$.

Решение. Если среди чисел будет хотя бы четыре разных, то значений суммы будет больше двух: $a + b + c$, $a + b + d$, $a + c + d$. Если разных чисел ровно три, то какое-то, например, a, будет повторяться, и значений суммы также будет больше двух: $a + b + c$, $a + b + a$, $a + c + a$. Таким образом, может быть только два разных числа, a и b. В наборах a, a, a, a, b, b и a, a, a, b, b, b значений суммы будет больше двух: в первом случае $3a$, $2b + a$, $a + 2b$, во втором случае $3a$, $3b$, $a + 2b$, $b + 2a$.

Заметим, что никакие два значения не могут совпадать, так как $a \neq b$. Всего 2 значения может получиться только в случае, когда 5 из 6 чисел совпадают: a, a, a, a, a, b. Тогда в 10 случаях сумма будет равна $3a$, в 10 случаях равна $2a + b$. Если $3a = 18$, $2a + b = 24$, то $a = 6$, $b = 12$. Если $3a = 24$, $2a + b = 18$, то $a = 8$, $b = 2$.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Баллы раскладываются так: за каждый найденный вариант – 2 балла, за доказательство, что нет других вариантов – 3 балла; баллы суммируются.*