Всероссийская олимпиада школьников. Школьный этап 2021/22 уч.г.
Математика, 8 класс, решения

Время выполнения 90 мин. Максимальное кол-во баллов – 35

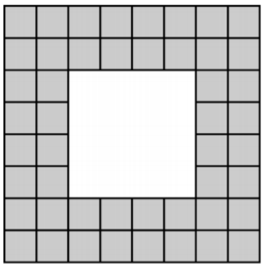
Вариант 1. Все задания по 7 баллов.

Критерии оценивания заданий.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

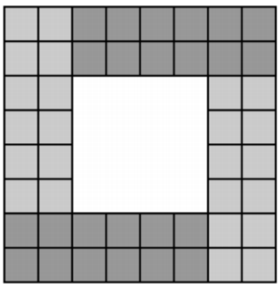
****Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям.***

8.1. Рамка размером 8×8, изображенная на рисунке, имеет ширину в две клетки и содержит 48 клеток. Сколько клеток содержит рамка размером 255×255, имеющая ширину в две клетки?



Ответ. 2024.

Решение. *Первый способ.* Разрежем рамку на четыре одинаковых прямоугольника так, как показано на рисунке. Ширина прямоугольников равна ширине рамки, т. е. 2 клетки. Длина каждого прямоугольника на 2 меньше стороны рамки: $255 - 2 = 253$ клетки. Тогда площадь одного прямоугольника равна $2 \cdot 253 = 506$. А значит, всего в рамке $4 \cdot 506 = 2024$ клеток.



Второй способ. Площадь рамки можно получить, если из площади квадрата 255×255 вычесть площадь внутреннего квадрата. Сторона внутреннего квадрата на 4 клетки меньше стороны большого. Значит, площадь рамки равна

$$255^2 - 251^2 = (255 - 251)(255 + 251) = 4 \cdot 506 = 2024.$$

Комментарий. *Любое полное верное решение – 7 баллов. Верный ход решения, но допущена арифметическая ошибка – 3 балла. Верное рассуждение, но допущена ошибка в оценке размеров (например, во втором способе ошибочно считается, что внутренний* *квадрат имеет сторону на 2 клетки меньше, чем большой) – 2 балла. Только верный ответ – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

8.2. Найдите все тройки положительных чисел, для которых выполнено равенство

$$a^2\,(a-2)+b^2(b-2)+c^2(c-2)=2a(a-2)+2b(b-2)+2c(c-2).$$

Ответ. $a=b=c=2$.

Решение. Перенесём все слагаемые в левую часть. Используем равенства

$$x^2(x-2)-2x(x-2)=(x^2-2x)(x-2)=x(x-2)^2.$$

Получим

$$a(a-2)^2+b(b-2)^2+c(c-2)^2=0.$$

Так как $a,\, b,\, c$ – положительные числа, в левой части стоит сумма неотрицательных слагаемых. Она равна нулю, только если каждое слагаемое равно нулю. Но это возможно только при $a=b=c=2$.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Составлено равенство (*), но дальнейших продвижений нет – 3 балла. Только ответ без обоснований – 0 баллов.*

8.3. Настя заменяет в двух числах одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные цифры – разными буквами. Получилось, что число $\overline{\text{АБВВАБ}}$ делится на 4, а $\overline{\text{БДЕБА}}$ делится на 28. Найдите две последние цифры суммы $\overline{\text{АБВВАБ}}+\overline{\text{БДЕБА}}$.

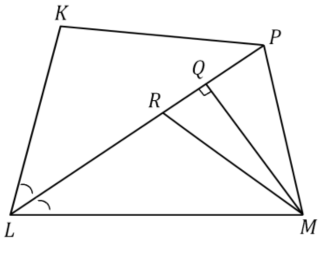
Ответ. 32.

Решение. Из условия следует, что числа $\overline{\text{АБВВАБ}}$ и $\overline{\text{БДЕБА}}$ делятся на 4. По свойству делимости на 4 числа $\overline{\text{АБ}}$ и $\overline{\text{БА}}$ тоже кратны 4. В частности, из этого следует, что обе цифры А и Б четны. Но число, делящееся на 4, в котором предпоследняя цифра четна, должно оканчиваться на цифру, кратную 4. Значит, обе цифры А и Б кратны 4. Так как они ненулевые (на них начинаются числа $\overline{\text{АБВВАБ}}$ и $\overline{\text{БДЕБА}}$), то одна из них равна 4, а вторая – 8. Указанная сумма оканчивается на те же 2 цифры, что и $\overline{\text{АБ}}+\overline{\text{БА}}=48+84=132$, то есть на 32.

Замечание. Такие числа действительно существуют, например, 45948 *и* 841484.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Сказано, что числа* $\overline{\text{БА}}$ *и* $\overline{\text{АБ}}$ *кратны* 4 *– 1 балл. Объяснено, почему обе цифры* А *и* Б *четны – 2 балла. Доказано, что обе цифры* А *и* Б *кратны* 4 *– 2 балла. Верно найдены значения для цифр* А *и* Б *– 2 балла. Баллы суммируются. Приведен только верный ответ – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

8.4. На биссектрисе угла KLM отмечена точка P, а на отрезке LP выбрана точка Q, причем $\angle MQP=90^\circ$. Известно, что $PQ=1$, $KL=2$, $LQ=3$ и $LM=4$. Докажите, что треугольник KMP – равнобедренный.



Решение. Отметим на отрезке LQ точку R так, что $RQ=1$, тогда $LR=2$. Треугольники KLP и RLM равны по первому признаку: $KL=LR=2$, $LP=LM=4$, $\angle KLP=\angle RLM$. Следовательно, $KP=RM$. Далее, отрезок MQ является медианой и высотой в треугольнике MPR. Значит, $PM=RM$. Таким образом, $KP=PM$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. В верном решении имеются не вполне очевидные и необоснованные переходы – 5-6 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 2-3 балла. Приведен только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

8.5. За круглым столом сидят 13 человек, каждый из которых либо правдивец, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт, либо чужак. Про чужаков известно, что правду они говорят только чужакам, а всем остальным лгут. Любые двое сидящих рядом сказали друг другу: «Ты не правдивец». Сколько лжецов могло сидеть за столом, если известно, что их было больше, чем чужаков?

Ответ. 4 или 5.

Решение. Ясно, что рядом с лжецом может сидеть только правдивец, рядом с правдивцем – только лжец или чужак, а рядом с чужаком – только правдивец или чужак. Если лжецов 3 или меньше, то чужаков 2 или меньше, вместе лжецов и чужаков 5 или меньше, а значит, правдивцев 8 или больше, что невозможно – два правдивца рядом сидеть не могут. Вот примеры, где лжецов 4 и 5:

ЧЧЧЧПЛПЛПЛПЛП и ЧЧПЛПЛПЛПЛПЛП.

Заметим, что правдивцев как минимум на 1 больше, чем лжецов, потому что справа от лжеца всегда сидит правдивец, и ещё справа от хотя бы одного чужака сидит правдивец. Если лжецов 6 или больше, то правдивцев хотя бы 7. Тогда двое правдивцев сидят рядом, что невозможно.

Комментарий. *Любое полное верное решение – 7 баллов. Возможны решения на основе перебора случаев или отдельной оценки числа каждого из вида гостей. В этом случае баллы ставились только при полном переборе случаев. Приведён верный пример, что лжецов может быть 4 – 1 балл. Приведён верный пример, что лжецов может быть 5 – 1 балл. Доказано, что лжецов не более 5 – 2 балла. Доказано, что лжецов не менее 4 – 3 балла. Баллы суммируются. Приведены только верные рассуждения про то, кто с кем может сидеть – до 2-х баллов. Только верный ответ – 1 балл. За только один из двух верных ответов без обоснования – 0 баллов. Даны без обоснований оба верных ответа – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

Всероссийская олимпиада школьников. Школьный этап 2021/22 уч.г.
Математика, 8 класс, решения

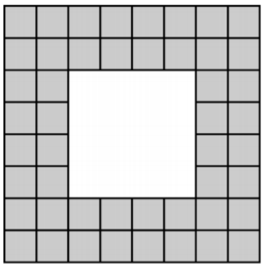
Время выполнения 90 мин. Максимальное кол-во баллов – 35

Вариант 2. Все задания по 7 баллов.

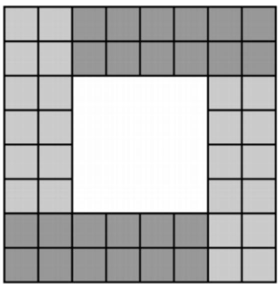
Критерии оценивания заданий.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

****Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям.***



8.1. Рамка размером 8×8, изображенная на рисунке, имеет ширину в две клетки и содержит 48 клеток. Сколько клеток содержит рамка размером 257×257, имеющая ширину в две клетки?
Ответ. 2040.
Решение. *Первый способ.* Разрежем рамку на четыре одинаковых прямоугольника так, как показано на рисунке. Ширина прямоугольников равна ширине рамки, т. е. 2 клетки. Длина каждого прямоугольника на 2 меньше стороны рамки: $257 - 2 = 255$ клетки. Тогда площадь одного прямоугольника равна $2 \cdot 255 = 510$. А значит, всего в рамке $4 \cdot 510 = 2040$ клеток.



Второй способ. Площадь рамки можно получить, если из площади квадрата 257×257 вычесть площадь внутреннего квадрата. Сторона внутреннего квадрата на 4 клетки меньше стороны большого. Значит, площадь рамки равна

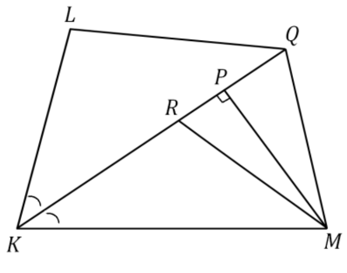
$$257^2 - 253^2 = (257 - 253)(257 + 253) = 4 \cdot 510 = 2040.$$

Комментарий. *Любое полное верное решение – 7 баллов. Верный ход решения, но допущена арифметическая ошибка – 3 балла. Верное рассуждение, но допущена ошибка в оценке размеров (например, во втором способе ошибочно считается, что внутренний* *квадрат имеет сторону на 2 клетки меньше, чем большой) – 2 балла. Только верный ответ – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

8.2. Найдите все тройки положительных чисел, для которых выполнено равенство
$$a^2\,(a-1)+b^2(b-1)+c^2(c-1)=a(a-1)+b(b-1)+c(c-1).$$
Ответ. $a=b=c=1$.
Решение. Перенесём все слагаемые в левую часть. Используем равенства
$$x^2(x-1)-x(x-1)=(x^2-x)(x-1)=x(x-1)^2.$$
Получим
$$a(a-1)^2+b(b-1)^2+c(c-1)^2=0\,. \qquad (*)$$
Так как a, b, c – положительные числа, в левой части стоит сумма неотрицательных слагаемых. Она равна нулю, только если каждое слагаемое равно нулю. Но это возможно только при $a=b=c=1$.
***Комментарий**. Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Составлено равенство (*), но дальнейших продвижений нет – 3 балла. Только ответ без обоснований – 0 баллов.*

8.3. Настя заменяет в двух числах одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные цифры – разными буквами. Получилось, что число $\overline{\text{АБВГДА}}$ делится на 4, а $\overline{\text{ДЕЖАД}}$ делится на 36. Найдите две последние цифры суммы $\overline{\text{АБВГДА}}+\overline{\text{ДЕЖАД}}$.
Ответ. 32.
Решение. Из условия следует, что числа $\overline{\text{АБВГДА}}$ и $\overline{\text{ДЕЖАД}}$ делятся на 4. По свойству делимости на 4 числа $\overline{\text{ДА}}$ и $\overline{\text{АД}}$ тоже кратны 4. В частности, из этого следует, что обе цифры А и Д четны. Но число, делящееся на 4, в котором предпоследняя цифра четна, должно оканчиваться на цифру, кратную 4. Значит, обе цифры А и Д кратны 4. Так как они ненулевые (на них начинаются числа $\overline{\text{АБВГДА}}$ и $\overline{\text{ДЕЖАД}}$), то одна из них равна 4, а вторая – 8. Указанная сумма оканчивается на те же 2 цифры, что и $\overline{\text{АД}}+\overline{\text{ДА}}=48+84=132$, то есть на 32.
Замечание. Такие числа действительно существуют, например, 45684 *и* 812348.
***Комментарий.** Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Сказано, что числа* $\overline{\text{ДА}}$ *и* $\overline{\text{АД}}$ *кратны* 4 *– 1 балл. Объяснено, почему обе цифры* А *и* Д *четны – 2 балла. Доказано, что обе цифры* А *и* Д *кратны* 4 *– 2 балла. Верно найдены значения для цифр* А *и* Д *– 2 балла. Баллы суммируются. Приведен только верный ответ – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

8.4. Внутри угла LKM выбрана точка P, что $\angle KPM=90^\circ$ и $\angle LKP=\angle MKP$. На продолжении отрезка KP за точку P отмечена такая точка Q, что $PQ=1$. Оказалось, что $KL=3$, $KP=4$ и $KM=5$. Докажите, что треугольник LQM равнобедренный.



Решение. Отметим на отрезке KP точку R так, что $PR=1$, тогда $KR=3$. Треугольники KLQ и KMR равны по первому признаку: $KL=KR=3$, $KQ=KM=5$, $\angle LKQ=\angle QKM$. Следовательно, $LQ=QM$. Далее, отрезок MP является медианой и высотой в треугольнике MRQ. Значит, $RM=QM$. Таким образом, $LQ=QM$.
***Комментарий.** Верное обоснованное решение – 7 баллов. В верном решении имеются не вполне очевидные и необоснованные переходы – 5-6 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 2-3 балла. Приведен только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

8.5. За круглым столом сидят 15 человек, каждый из которых либо правдивец, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт, либо чужак. Про чужаков известно, что правду они говорят только чужакам, а всем остальным лгут. Любые двое сидящих рядом сказали друг другу: «Ты не правдивец». Сколько лжецов могло сидеть за столом, если известно, что их было не четверо и больше, чем чужаков?

Ответ. 5 или 6.

Решение. Ясно, что рядом с лжецом может сидеть только правдивец, рядом с правдивцем – только лжец или чужак, а рядом с чужаком – только правдивец или чужак. Если лжецов 3 или меньше, то чужаков 2 или меньше, вместе лжецов и чужаков 5 или меньше, а значит, правдивцев 10 или больше, что невозможно – два правдивца рядом сидеть не могут. Лжецов не может быть четверо по условию. Вот примеры, где лжецов 5 или 6:

ЧЧЧЧПЛПЛПЛПЛПЛП и ПЧЧПЛПЛПЛПЛПЛПЛ.

Заметим, что правдивцев как минимум на 1 больше, чем лжецов, потому что справа от лжеца всегда сидит правдивец, и ещё справа от хотя бы одного чужака сидит правдивец. Если лжецов 7 или больше, то правдивцев хотя бы 8. Тогда двое правдивцев сидят рядом, что невозможно.

Комментарий. *Любое полное верное решение – 7 баллов. Возможны решения на основе перебора случаев или отдельной оценки числа каждого из вида гостей. В этом случае баллы ставились только при полном переборе случаев. Приведён верный пример, что лжецов может быть 5 – 1 балл. Приведён верный пример, что лжецов может быть 6 – 1 балл. Доказано, что лжецов не более 6 – 2 балла. Доказано, что лжецов не менее 4 – 3 балла. Баллы суммируются. Приведены только верные рассуждения про то, кто с кем может сидеть – до 2-х баллов. Только верный ответ – 1 балл. За только один из двух верных ответов без обоснования – 0 баллов. Даны без обоснований оба верных ответа – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*