Всероссийская олимпиада школьников. Муниципальный этап 2021/22 уч.г.
Математика, 8 класс, решения

Время выполнения 235 мин. Максимальное кол-во баллов – 35

Все задания по 7 баллов

Критерии оценивания заданий

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

***Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям**

8.1. Числа a, b, c удовлетворяют условию:

$$a+b=a^2+b^2=a^3+b^3=c.$$

Найдите все возможные значения c, и докажите, что других нет.

Ответ. $0, 1, 2$.

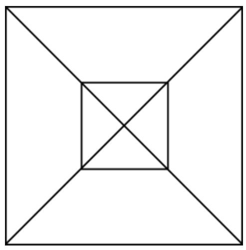
Решение. Из соотношения $a+b=a^2+b^2=c$ найдём ab: $(a+b)^2=c^2=c+2ab$; $ab=\frac{c^2-c}{2}$. Подставим в равенство $a^3+b^3=c$:

$$c=a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)=c\left(c-\frac{c^2-c}{2}\right).$$

Итак, $c=c\left(c-\frac{c^2-c}{2}\right)$, или $c(c^2-3c+2)=0$. Разложив на множители, получаем $c(c-1)(c-2)=0$. Поэтому $c=0; 1; 2$. Легко видеть, что для каждого значения c существуют соответствующие значения a и b.

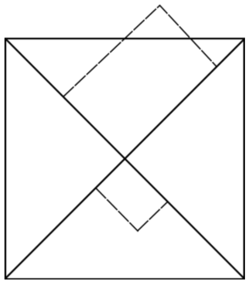
Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Верно составлено уравнение, но ответ не получен – 4 балла. Решение верно начато, но нет существенного продвижения – 1 балл. Ответ получен подбором чисел, удовлетворяющих условию, но не показано, что другие ответы невозможны – 2 балла, если подбором найдена только часть ответа – 1 балл. При верном ходе решения допущены ошибки в преобразованиях – снимать 2 балла за ошибку. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

8.2. Дан квадрат со стороной 1. Найдите в плоскости квадрата множество точек, удовлетворяющих условию: сумма расстояний от этих точек до диагоналей квадрата равна 2. (Расстояние до диагонали равно расстоянию до прямой, на которой лежит диагональ).



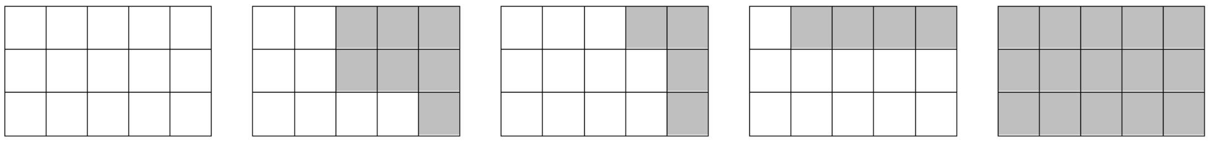
Ответ. Квадрат со стороной $\sqrt{2}$, со сторонами, параллельными сторонам исходного квадрата, и с тем же центром.

Решение. Выделим на продолжениях диагоналей 4 точки, удовлетворяющие условию. Это точки, находящиеся на расстоянии 2 от центра. Они являются вершинами квадрата с диагональю 4, то есть со стороной $\sqrt{2}$. Возьмем произвольную точку на стороне квадрата, и опустим из нее перпендикуляры на диагонали. Поскольку диагональ делит угол квадрата на два угла по $45°$, легко видеть, что сумма длин перпендикуляров равна 2. Таким образом, любая точка построенного квадрата удовлетворяет условию. Очевидно, если опустить перпендикуляры на диагонали из внутренней точки квадрата со стороной $\sqrt{2}$, суммарное расстояние будет меньше, а если из внешней – больше.



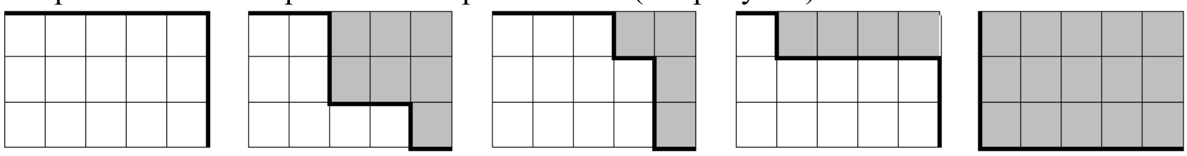
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Найден квадрат – 2 балла; доказано, что все точки квадрата удовлетворяют условию – 3 балла; доказано, что точки внутри и вне квадрата условию не удовлетворяют – 2 балла; баллы суммируются. Найдены отдельные точки фигуры – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

8.3. Костя нарисовал прямоугольник 3×5. Первым ходом Костя отмечал любую клетку прямоугольника, и вырезал её, и все клетки, которые лежат правее, или выше, или выше и правее. Потом он делал то же самое с оставшейся частью, и так продолжалось до тех пор, пока все клетки не были вырезаны. Костя играл несколько раз, а Маша зарисовывала картинки, которые получались после каждого хода. На рисунке показаны 5 таких картинок, возможно, из разных игр (серым закрашены вырезанные части). Сколько всего разных картинок может зарисовать Маша?



Ответ. 56.

Решение. Число картинок равно числу способов разбить прямоугольник на 2 части согласно правилам, то есть равно числу ломаных, проведенных из верхнего левого угла в правый нижний угол. В каждой ломаной 5 горизонтальных отрезков и 3 вертикальных (см. рисунок).



Среди 8 отрезков ломаной место для 3 вертикальных можно найти числом способов $8 \cdot 7 \cdot 6$, три вертикальных отрезка можно переставить 6 способами, поэтому число ломаных равно $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$.

Комментарий. *Приведено любое полное обоснованное решение, в том числе и полным перебором – 7 баллов. Неполный перебор, приведший к неверному ответу – 2 балла. Неверный перебор – 1 балл. Решение начато, но продвижение незначительно – 1 балл. Есть идея, как посчитать число рисунков, но она не реализована – 2 балла. Решение в целом верное, но содержит небольшие ошибки – 5 баллов.*

8.4. Известно, что число $a^2 + b^2$ делится на 3, a и b – натуральные числа. Найдите остаток от деления на 3 числа $2a^2 + 4ab + 5b^2 + 7a + b + 1$.

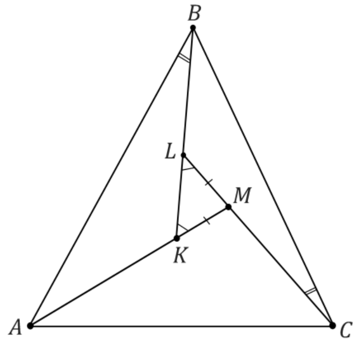
Ответ. 1.

Решение. Квадрат целого числа имеет вид $(3k)^2$ или $(3k \pm 1)^2$ и при делении на 3 может иметь только остаток 1 или 0. Остаток от деления на 3 числа $a^2 + b^2$ может равняться $0, 1, 2$, причём 0 получается только в случае, когда каждое слагаемое делится на 3. По условию, $a^2 + b^2$ делится на 3, следовательно, и a^2, и b^2 делятся на 3, значит, делятся на 3 и a и b.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Факт «квадрат целого числа делении на 3 может иметь только остаток 1 или 0» приведён без доказательства –снять 1 балл. Доказано только, что a^2, b^2 делятся на 3 – 4 балла. Доказано, что a, b, a^2, b^2 делятся на 3, но верный ответ не получен – 6 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

8.5. Внутри треугольника ABC с углами $\angle A = \angle C = 65°$ выбрана точка M так, что $\angle AMC = 100°$. На отрезке AM есть такая точка K, что $\angle BKM = 50°$, в этой точке K сидит муха. К мухе ползут два паука, один из точки B, другой из точки C. Какой путь длиннее, BK или CMK?

Ответ. Пути равны.



Решение. Найдём $\angle B$: $\angle B = 180° - 2 \cdot 65° = 50°$. Продлим отрезок CM до пересечения с BK в точке L. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle KLM = \angle AMC - \angle BKM = 100° - 50° = 50°$. Имеем $\angle LCB + \angle LBC = \angle KLM = 50°$, отсюда $\angle LCB = 50° - \angle LBC$; $\angle ABK = \angle B - \angle KBC = 50° - \angle LBC$. Следовательно, $\angle LCB = \angle ABK$. Рассмотрим другую пару углов: $\angle BKA = 180° - 50° = 130°$ и $\angle BLC = 180° - 50° = 130°$. В треугольниках ABK и BCL равны углы и $AB = BC$, поэтому треугольники ABK и BCL равны. Следовательно, $BK = CL = CM + ML = CM + MK$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. В верном решении имеются не вполне очевидные и не обоснованные переходы – 5-6 баллов. Доказано только равенство треугольников ABK и BCL – 5 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 2-3 балла. Приведен только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*