Всероссийская олимпиада школьников. Муниципальный этап 2021/22 уч.г.
Математика, 10 класс, решения

Время выполнения 235 мин. Максимальное кол-во баллов – 35

Все задания по 7 баллов

Критерии оценивания заданий

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

****Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям***

10.1. Уравнение $x^2+mx+n=0$ имеет два действительных корня. Числа, обратные к его корням $\left(\frac{1}{x_1}\text{ и }\frac{1}{x_2}\right)$, являются корнями уравнения $x^2+(6m+1)x+(6n+1)=0$. Найдите m и n.
Ответ. $m=-\frac{1}{8}, n=-\frac{1}{2}$.
Решение. Пусть x_1, x_2 – корни первого уравнения. Тогда по теореме Виета $x_1+x_2=-m$, $x_1x_2=n$. Второе уравнение должно иметь корни $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$. Опять же по теореме Виета

$$6n+1=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{n};\qquad 6m+1=-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=-\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{m}{n}.$$

Из первого равенства следует, что $6n^2+n-1=0$, то есть $n=\frac{1}{3}$ или $n=-\frac{1}{2}$. Если $n=\frac{1}{3}$, то из второго равенства $6m+1=3m$, $m=-\frac{1}{3}$. Если же $n=-\frac{1}{2}$, то $6m+1=-2m$, $m=-\frac{1}{8}$. Есть, однако, важный нюанс. Дело в том, что теорема Виета сама по себе не является гарантией наличия действительных корней у квадратного трехчлена. Корни у первого трехчлена есть лишь при условии $m^2\geq 4n$, и первая пара чисел не удовлетворяет этому условию.
Комментарий. *Любое верное обоснованное решение – 7 баллов. В ответе присутствуют первая и вторая пары чисел – снимать 3 балла. За арифметические ошибки при верных рассуждениях снижать на 2 балла. Приведён только верный ответ – 0 баллов.*

10.2. Коля написал у себя в тетради 4 различных натуральных числа. После этого он выбежал к доске и написал все попарные суммы чисел из тетради. Какое наибольшее количество простых чисел может быть на доске?
Ответ. 4 числа.
Решение. *Оценка.* Заметим, что сумма двух различных натуральных чисел больше 2, поэтому если какая-то сумма двух чисел равна простому числу, то это простое число нечётное. Следовательно, количество простых чисел на доске не превосходит количества записанных нечётных чисел. Если все 4 задуманных Васей числа чётны (или все 4 нечётны), то на доску будут выписаны только чётные числа. Если Вася за-

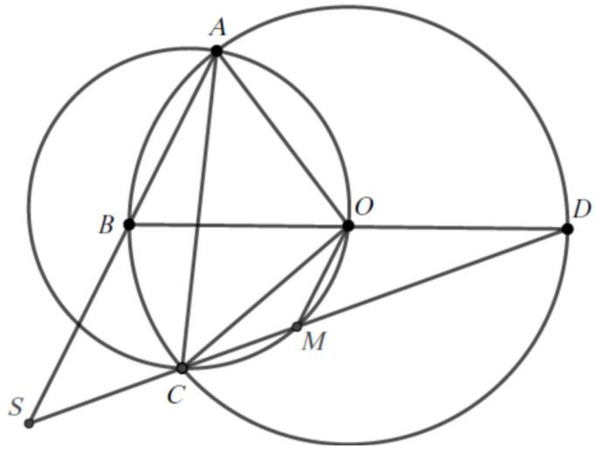
думал одно чётное число и 3 нечётных (или одно нечётное число и 3 чётных), то на доску будут выписаны 3 чётных числа и 3 нечётных. Наконец, если Вася задумал 2 чётных числа и 2 нечётных, то на доску будут выписаны 2 чётных числа и 4 нечётных. Таким образом, на доску будет выписано не более 4 нечётных чисел, то есть простых чисел не больше 4. *Пример.* Ровно 4 простых числа могли быть выписаны, например, если Вася задумал числа 1, 2, 3, 4. Тогда простыми числами, выписанными на доску, будут $1+2=3, 1+4=5, 3+2=5$ и $3+4=7$.
Комментарий. *Доказано, что может быть выписано не более 4 простых чисел – 4 балла. Приведен только пример, в котором выписано 4 простых числа – 2 балла. Если имеются верные оценка и пример – 7 баллов. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.*

10.3. Десять волейбольных команд участвовали в однокруговом турнире (каждая команда играла по одному разу со всеми остальными). В волейболе, если матч заканчивается со счетом $3:0$ или $3:1$, то выигравшая команда получает 3 очка, а проигравшая – 0 очков. Если же матч заканчивается со счетом $3:2$, то команды получают соответственно 2 и 1 очко. Про один из матчей известно, что в нем было сыграно 5 партий. По окончании турнира оказалось, что первая команда опередила вторую на столько же очков, на сколько вторая опередила третью, третья четвёртую, ..., предпоследняя последнюю. Сколько очков набрала команда, занявшая первое место?
Ответ. 18 очков.
Решение. Пусть аутсайдер набрал a очков, предпоследняя команда – $a+d$ очков, тогда восьмая команда набрала $a+2d$ очков, …, победитель – $a+9d$ очков. Всего в турнире было сыграно $\frac{10\cdot 9}{2}=45$ матчей, в каждом из которых разыгрывалось 3 очка. Поэтому сумма очков, набранных всеми командами, равна $3\cdot 45=135$. Итак, $10a+45d=135$, откуда $2a+9d=27$. Следовательно, d нечётно и не больше 3, т.е. $d=3$ или $d=1$. В первом случае $a=0$, т.е. победитель набрал 27 очков, а значит, во всех матчах получил по 3 очка. Команда, занявшая второе место, набрала 24 очка, но она проиграла победителю, поэтому получила по 3 очка во всех остальных матчах. Рассуждая аналогично, получим, что в каждом матче выигравшая команда получила 3 очка, а это противоречит тому, что был матч с 5 партиями. Второй случай $d=1$, $a=9$ возможен, команды набирают тогда $9, 10, \ldots, 18$ очков. Например, каждая команда выиграла у всех команд, занявших более низкие места, со счётом $3:2$.
Комментарий. *Найдена сумма очков, набранных всеми командами – 1 балл; доказано, что d нечётно и не больше 3 – 2 балла; рассмотрен случай d=3 – 2 балла; рассмотрен случай d=1 и приведен пример – 2 балла. Баллы суммируются. Верный ответ без обоснования – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

10.4. Про положительные числа a, b и c известно, что $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{2}{a+b+c}=1$. Докажите, что $abc\geq 8$.
Решение. *Первый способ.* Пусть $a+b+c=x$, $abc=y$. Тогда
$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{2}{a+b+c}=\frac{a+b+c}{abc}+\frac{2}{a+b+c}=\frac{x}{y}+\frac{2}{x}=1.$$
Получившееся уравнение равносильно уравнению $x^2+2y=xy$. Умножим обе его части на 4 и после равносильных преобразований получим $(2x-y)^2=y(y-8)$. Отсюда ввиду положительности числа y имеем $y-8=\frac{(2x-y)^2}{y}\geq 0$ и $y\geq 8$, что и требовалось доказать.
Второй способ. $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{a+b+c}{abc}$. Так как числа $\frac{a+b+c}{abc}$ и $\frac{2}{a+b+c}$ положительны, можно применить неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим. Получим
$$1=\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{2}{a+b+c}\geq 2\sqrt{\frac{a+b+c}{abc}\cdot\frac{2}{a+b+c}}=2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{abc}}.$$
После возведения неравенства в квадрат (что допустимо, так как обе его части положительны) получим требуемое неравенство.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1-3 балла. Примеры того, что неравенство справедливо – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

10.5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, при этом BD – диаметр окружности. Лучи AB и DC пересекаются в точке S. Окружность, проходящая через точки A, O и C, пересекает отрезок CD в точке M, отличной от точки C. Докажите, что M – середина отрезка DS.

Решение. Из условия следует, что четырехугольник $AOMC$ – вписанный (см. рисунок), поэтому $\alpha = \angle OAC = 180^\circ - \angle OMC = \angle OMD$ (смежные углы). Треугольник OAC – равнобедренный ($OA = OC$ как радиусы). Значит, $\angle OCA = \alpha$. Аналогично, $\angle OCD = \angle ODC = \beta$. Тогда $\angle ACD = \angle ACO + \angle OCD = \alpha + \beta$. Далее $\angle CAS = \angle CAB = \angle CDB = \beta$ (вписанные углы). Угол ACD – внешний для треугольника ACS, поэтому $\alpha + \beta = \angle ACD = \angle CAS + \angle CSA$, то есть $\alpha + \beta = \beta + \angle CSA$. Итак, $\angle CSA = \alpha = \angle OMD$. Это означает, что $MO \parallel SA$. Но O – середина BD, значит, MO – средняя линия треугольника BSD. Следовательно, точка M – середина SD.



Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. В верном доказательстве имеются не вполне очевидные и не обоснованные переходы – 5 баллов. Если доказано, что ∠OAC=∠OMD – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*