Всероссийская олимпиада школьников. Муниципальный этап 2021/22 уч.г.
Математика, 9 класс, решения

Время выполнения 235 мин. Максимальное кол-во баллов – 35

Все задания по 7 баллов

Критерии оценивания заданий

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

***Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям**

9.1. Туристы поселились на два дня в палаточном лагере на Столбах, и взяли с собой воду в одинаковых бутылках. В первый день они выпили 6 бутылок воды, причём всем воды досталось поровну. Несколько человек после этого вернулись домой, а оставшиеся 5 допили взятую воду во второй день, и каждому из них досталось воды вдвое меньше, чем в первый день. Сколько туристов было вначале?
Ответ. 15.
Решение. Пусть было n бутылок воды, а туристов было m человек ($m > 5$). Тогда каждый из них в первый день выпил $\frac{6}{m}$ бутылок, поэтому во второй день каждому из 5 туристов досталось $\frac{3}{m}$ бутылок. Так как бутылок оставалось $n-6$, имеем уравнение $(n-6) = 5\cdot\frac{3}{m}$, откуда $m(n-6) = 15$. Тогда m – натуральный делитель числа 15, и $m > 5$, т.е. $m = 15$.
Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Верно составлено уравнение, но ответ не получен – 4 балла. Решение верно начато, но нет существенного продвижения – 1 балл. При верном ходе решения допущены ошибки в вычислениях – снимать 2 балла за ошибку. Ответ получен подбором чисел, удовлетворяющих условию, но не показано, что другие ответы невозможны; при этом описано, как производился подбор – 3 балла. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

9.2. Найдите число правильных несократимых дробей $\frac{m}{n}$, где m и n – натуральные числа, произведение которых равно $20! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 19\cdot 20$.
Ответ. 128.
Решение. Число 20! разлагается в произведение некоторых степеней простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Ввиду несократимости дроби каждое из этих чисел может быть множителем только в одном числе, m или n, причем в максимальной степени. Таким образом, задача сводится к числу способов разделить 8 простых чисел на две части. Поскольку каждое из 8 чисел может попадать в одну из двух частей, имеется два способа для одного числа и 2^8 способов для 8 чисел. В половине этих способов $m > n$, поэтому ответ: $2^7 = 128$.
Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Баллы в данном решении раскладываются так: выделены простые множители – 2 балла, замечено, что каждое простое число может быть*

множителем или в числителе, или в знаменателе – 2 балла, подсчитано число способов – 3 балла; баллы суммируются. При верном ходе решения не учтено, что дробь правильная, и получен ответ 2^8 *– 6 баллов. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

9.3. Пусть x, y, z – положительные числа. Докажите, что $\frac{x}{y+z}+\frac{y^2}{xz}+\frac{z^2}{xy} \geq 2$.

Решение. Рассмотрим два последних слагаемых: $\frac{y^2}{xz}+\frac{z^2}{xy}=\frac{y^3+z^3}{xyz}=\frac{(y+z)(y^2+z^2-yz)}{xyz} \geq \frac{y+z}{x}$, так как $\frac{(y^2+z^2-yz)}{yz} \geq 1$. Действительно, если $\frac{(y^2+z^2-yz)}{yz} < 1$, то $y^2+z^2 < 2yz$, то есть $(y-z)^2 < 0$, что невозможно. Итак, $\frac{x}{y+z}+\frac{y^2}{xz}+\frac{z^2}{xy} \geq \frac{x}{y+z}+\frac{y+z}{x}$. Обозначим $\frac{x}{y+z}=t$. Докажем, что $t+\frac{1}{t} \geq 2$ при $t>0$. Действительно, если $t+\frac{1}{t}<2$, то $t^2+1-2t=(t-1)^2<0$, что неверно. Подставляя, получаем $\frac{x}{y+z}+\frac{y^2}{xz}+\frac{z^2}{xy} \geq \frac{x}{y+z}+\frac{y+z}{x} \geq 2$.

Комментарий. *Приведено любое полное обоснованное решение – 7 баллов. Неравенство* $t+\frac{1}{t} \geq 2$ *использовано без доказательства – 6 баллов. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи – 1-2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

9.4. Сумма трёх чисел равна 1, и сумма квадратов этих чисел также равна 1. Какое наименьшее значение может принимать самое маленькое из этих трёх чисел?

Ответ. $-\frac{1}{3}$.

Решение. По условию

$$\begin{cases} a+b+c=1, \\ a^2+b^2+c^2=1. \end{cases}$$

Пусть c – самое маленькое из чисел. Имеем $a+b=1-c$, откуда $a^2+b^2=1-c^2$. Возведём первое равенство в квадрат: $a^2+b^2+2ab=1-2c+c^2$. Приравнивая выражения для a^2+b^2, получаем: $ab=c^2-c$, то есть $\begin{cases} a+b=1-c, \\ ab=c^2-c. \end{cases}$

Таким образом, a и b являются корнями приведенного квадратного уравнения

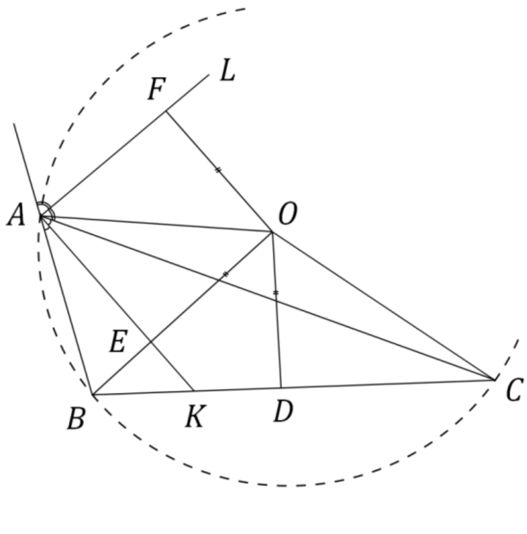
$$t^2-(1-c)t+c^2-c=0.$$

Вычислим дискриминант $D=(1-c)^2-4c^2+4c=1+2c-3c^2$, и найдем, при каких c $D \geq 0$. Дискриминант $D_1=4+12=16$, корни равны $c_1=-\frac{1}{3}$, $c_2=1$. При $c=-\frac{1}{3}$ находим $a=b=\frac{2}{3}$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. В верном решении имеются не вполне очевидные и не обоснованные переходы – 5-6 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 2 балла. Ответ получен из рассмотрения примеров, доказательства минимальности нет – 2 балла. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

9.5. Точка O – центр описанной окружности тупоугольного треугольника ABC с углом B большим 90°. AK и AL – биссектрисы соответственно внутреннего и внешнего углов треугольника ABC при вершине A. Расстояния от O до прямых AK, AL, BC равны 4. Найдите $\angle ABC$.

Ответ. 112,5°.



Решение. Пусть E и F – основания перпендикуляров из точки O на внутреннюю и внешнюю биссектрисы угла A, D – основание перпендикуляра, опущенного из O на сторону BC. скольку биссектрисы внутреннего и внешнего углов кулярны, в четырехугольнике $AFOE$ три угла прямые и $OE=OF=4$. Поэтому $AFOE$ – квадрат со стороной 4. Следовательно, $\angle EAO=45^\circ$ и диагональ AO равна $4\sqrt{2}$. Но AO – радиус окружности, поэтому $AO=BO=CO=4\sqrt{2}$. Таким образом, в прямоугольном треугольнике BOD катет равен 4, а гипотенуза $4\sqrt{2}$. Значит, второй катет также равен 4, и треугольник бедренный. Следовательно, $\angle OBC=45^\circ$. Отсюда следует, что $\angle BOC=90^\circ$, поскольку треугольник BOC равнобедренный с углом при основании равным 45°. Центральный угол $\angle BOC$ и вписанный угол $\angle BAC$ опираются на одну дугу. Следовательно, $\angle BAC = \frac{\angle BOC}{2} = 45^{\circ}$ и, значит, $\angle KAB = 22{,}5^{\circ}$. Тогда $\angle BAO = \angle KAB + \angle KAO = 22{,}5^{\circ} + 45^{\circ} = 67{,}5^{\circ}$. Треугольник AOB равнобедренный, поэтому $\angle ABO = \angle BAO = 67{,}5^{\circ}$ и, значит,

$$\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC = 67{,}5^{\circ} + 45^{\circ} = 112{,}5^{\circ}.$$

Замечание. *На рисунке точка E оказалась на отрезке BO. Это действительно так, но в приводимых рассуждениях мы не пользуемся этим обстоятельством.*

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Баллы в данном решении раскладываются так: найден радиус окружности – 2 балла; доказано, что ∠BOC=90° – 2 балла; найден ∠BAO=67,5° – 2 балла; найден ∠ABC – 1 балл; баллы суммируются. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений или потенциально полезные идеи – 2 балла. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*