Всероссийская олимпиада школьников. Муниципальный этап 2021/22 уч.г.
Математика, 7 класс, решения

Время выполнения 235 мин. Максимальное кол-во баллов – 35

Все задания по 7 баллов

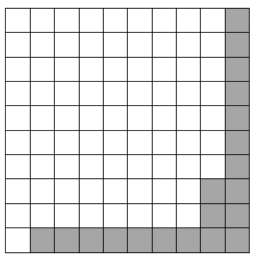
Критерии оценивания заданий

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

***Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям**

7.1. Три пирата играли в игру, у каждого из них были монеты. Сначала Билл проиграл и отдал часть своих монет Джеку и Сэму, отчего количества монет у них удвоились. После этого проиграл Джек и отдал часть своих монет Биллу и Сэму, отчего количества монет у них тоже удвоились. Наконец, проиграл Сэм и отдал часть своих монет Биллу и Джеку, у которых опять же количества монет удвоились. Оказалось, что у Сэма и в начале и в конце было 36 монет. Сколько всего монет у пиратов?
Ответ. 252.
Решение. Проследим за количеством монет у Сэма. После первого перераспределения у него их 72, после второго – 144. Следовательно, он раздал $144 - 36 = 108$ монет и при этом количество монет у Билла и Джека удвоилось. То есть всего монет у Билла, Джека и Сэма вместе $2 \cdot 108 + 36 = 252$.
Комментарий. *Приведено верное решение и получен верный ответ – 7 баллов. Правильное рассуждение с арифметической ошибкой, приводящее к неправильному ответу – 5 баллов. Если ответ получен из рассмотрения примера – 4 балла. Если присутствует пример без проверки и правильный ответ – 2 балла. Только правильный ответ без обоснования – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов. Приводить первоначальное число монет у каждого пирата при верном решении не требуется. Если же рассматривается пример, то необходимо проверять его корректность, так как при промежуточных шагах у пирата может не хватить монет, чтобы выполнить условие задачи. Во всех примерах первоначально у Джека от 64 до 89 монет включительно.*

7.2. Можно ли разрезать какой-нибудь клетчатый квадрат по линиям сетки на две фигуры одинакового периметра так, чтобы площадь одной из частей оказалась в 4 раза меньше, чем другой?
Ответ. Можно.
Решение. См. рисунок. Квадрат 10×10 клеток, в серой части 20 клеток, в светлой – 80 клеток. Периметры фигур можно не подсчитывать, достаточно проверить, что периметр квадрата разделился пополам (а линия внутри квадрата добавляет к периметрам частей поровну).
Комментарий. *Приведен верный пример – 7 баллов. Верный рисунок является достаточным обоснованием ответа, за отсутствие пояснений баллы не снимать.*



Замечание. *Примеров много. Но во всех них сторона квадрата кратна* 5, *а внешний периметр делится строго пополам.*

7.3. Вася и Петя ехали на велосипедах друг другу на встречу: Вася из деревни Ягодной в Грибную, а Петя – из Грибной в Ягодную. Они встретились, когда Вася проехал 12 км и еще треть оставшегося ему до Грибной пути, а Петя проехал 21 км и четверть оставшегося ему пути до Ягодной. Какое расстояние между деревнями Ягодной и Грибной?

Ответ. 57 км.

Решение. *Первый способ.* Пусть расстояние от деревень Ягодной и Грибной равно S км. После того, как Вася проехал 12 км, ему осталось проехать $S-12$ км, следовательно, к моменту встречи с Петей он проедет $12+\frac{1}{3}(S-12)$ км. Аналогично, Петя к моменту их встречи проедет $21+\frac{1}{4}(S-21)$ км. Получаем уравнение

$$12+\tfrac{1}{3}(S-12)+21+\tfrac{1}{4}(S-21)=S.$$

Решая его, находим

$$\frac{1}{3}S+\frac{1}{4}S+33-4-\frac{21}{4}=S,$$

Или

$$S-\frac{7}{12}S=\frac{95}{4},\quad \frac{5}{12}S=\frac{95}{4},\quad S=\frac{95\cdot 12}{4\cdot 5}=57.$$

Следовательно, искомое расстояние есть $S=57$ км.

Второй способ. Пусть до места встречи Вася проехал $12+x$ км, тогда до Грибной ему оставалось ехать $2x$ км. Аналогично, если Петя проехал до места встречи $21+y$ км, то до Ягодной ему оставалось ехать $3y$ км. Составляем два уравнения:

$$12+x=3y,\quad 21+y=2x.$$

Выразим $x=3y-12$ из первого уравнения и подставим во второе:

$$21+y=6y-24,\quad 5y=45,\quad y=9.$$

Отсюда $x=3\cdot 9-12=15$. Значит, расстояние между Ягодной и Грибной деревнями составляет $12+3x=21+4y=57$ км.

Комментарий. *Приведено верное решение и получен верный ответ – 7 баллов. Верно составлены уравнения, но из-за арифметической ошибки при их решении получен неверный ответ – 5 баллов. Задача не решена, но есть элементы верных рассуждений – 2 балла. Приведены только верный ответ и проверка того, что он удовлетворяет условию задачи – 3 балла. Приведен только ответ – 1 балл.Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

7.4. У Незнайки есть семь карточек с цифрами: 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Он хочет составить из них два трёхзначных числа A и B (не используя одну из карточек) так, что $A\cdot B$ делится на 81, а $A+B$ делится на 9. Сколькими способами он может это сделать?

Ответ. 36.

Решение. Если одно из чисел не делится на 9, то второе тоже, так как их сумма делится на 9. Но тогда произведение не может делиться на 81, противоречие. Следовательно, оба числа делятся на 9. Тогда сумма цифр в каждом числе делится на 9, а значит, и общая сумма использованных цифр тоже. Сумма всех данных цифр $1+2+\cdots+7$ равна 28. Если выкинуть цифру 1, то останется 27, что делится на 9; при выкидывании остальных цифр получить сумму, кратную 9, нельзя. Значит, использованы цифры 2, 3, 4, 5, 6, 7. Заметим, что наименьшая возможная сумма трёх из этих цифр равна $2+3+4=9$, а наибольшая – $5+6+7=18$. Другие суммы, кратные 9, получить нельзя; а 9 и 18 можно получить только одним способом. Получается, одно число состоит из цифр 2, 3, 4, а второе – из 5, 6, 7. Есть шесть чисел, которые можно составить из цифр 2, 3, 4, и шесть чисел, которые можно составить из цифр 5, 6, 7. Нам подходят всевозможные пары этих чисел.

Комментарий. *Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие баллы суммируются: доказано, что оба числа должны делиться на 9 – 1 балл; в предположении (возможно, не обоснованном), что оба числа делятся на 9, доказано, что цифра 1 не используется – 2 балла; в предположении (возможно, не обоснованном), что оба числа делятся на 9 и цифра 1 не используется, доказано, что одно число состоит из цифр 2, 3, 4, а второе состоит из цифр 5, 6, 7 – 3 балла; предыдущее не доказано, но сформулировано – 1 балл; имеется верный ответ – 1 балл. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

7.5. В заколдованном лесу живут гномы трёх профессий: рудокопы, кузнецы и ювелиры. Рудокопы врут кузнецам, кузнецы врут ювелирам, а ювелиры врут рудокопам. В остальных случаях все говорят правду. Как-то раз на опушке встали в круг 50 гномов из этого леса. Каждый гном повернулся к своему левому соседу и сказал свою профессию. Затем каждый повернулся к своему правому соседу и снова назвал свою профессию. Оказалось, что фраза «Я кузнец» прозвучала ровно 90 раз. Какое наименьшее количество кузнецов могло быть на опушке?

Ответ. 20.

Решение. *Оценка.* В каждой паре соседей из двух заявлений не более одной лжи. То есть всего не более 50 неправд. В частности, не более 50 неправд вида «Я кузнец». Значит, не менее 40 таких фраз верны и их произносят кузнецы. Поэтому кузнецов не менее 20. *Пример* с 20 кузнецами: поставим подряд 20 кузнецов, затем 5 ювелиров. Затем между каждыми двумя уже стоящими участниками в круге поставим по рудокопу (25 рудокопов):

РКРКР … КРЮРЮРЮРЮРЮ.

Первые 41 гномов (до первого ювелира) образуют 40 пар вида «РК» и «КР»; в каждой такой паре кузнец говорит рудокопу правду, а рудокоп, обманывая кузнеца, также может сказать, что он кузнец – таким образом, прозвучит 80 нужных фраз. Оставшиеся 10 пар соседей имеют вид «ЮР» и «РЮ». В каждой из них рудокопы говорят ювелирам правду, а ювелиры могут соврать рудокопам, назвавшись кузнецами – это ещё 10 нужных фраз. Итого, прозвучит ровно 90 нужных фраз.

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Верно получена оценка – 4 балла, построен верный пример – 3 балла, баллы суммируются. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*