Всероссийская олимпиада школьников. Муниципальный этап 2021/22 уч.г.
Математика, 11 класс, решения

Время выполнения 235 мин. Максимальное кол-во баллов – 35

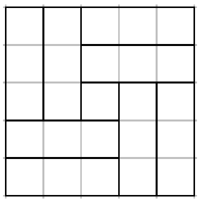
Все задания по 7 баллов

Критерии оценивания заданий

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

***Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям**

11.1. Какое наибольшее число параллелепипедов $3 \times 1 \times 1$ можно вырезать из куба $5 \times 5 \times 5$?
Ответ. 41.
Решение. Больше 41 параллелепипеда вырезать нельзя, так как $42 \times 3 = 126 > 125$. Покажем, как вырезать 41 параллелепипед. Все слои режутся как на картинке, после чего из центрального параллелепипеда $5 \times 1 \times 1$ вырезается еще один параллелепипед $3 \times 1 \times 1$, итого $5 \times 8 + 1 = 41$.



Комментарий. *Показано, как вырезать 41 параллелепипед – 5 баллов. Доказано, что больше 41 параллелепипеда вырезать нельзя – 2 балла. Баллы суммируются. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.*

11.2. Существует ли квадратный трёхчлен с различными корнями x_1 и x_2 и ненулевыми коэффициентами такой, что если переставить какие-то два его коэффициента, получится квадратный трёхчлен с корнями x_1 и $2x_2$?
Ответ. Существует, например $3x^2 - 2x - 1$ имеет корни 1 и $-\frac{1}{3}$, а $3x^2 - x - 2$ имеет корни 1 и $-\frac{2}{3}$.
Решение. Построить пример можно из следующих соображений. Рассмотрим, например, квадратные трехчлены $ax^2 + bx + c$ и $ax^2 + cx + b$. Запишем теорему Виета для этих квадратных трёхчленов:
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}; \qquad x_1 + 2x_2 = -\frac{c}{a}; \qquad 2x_1x_2 = \frac{b}{a}.$$
Сравнивая второе и четвертое уравнение, видим, что $b = 2c$, тогда перепишем первое и третье уравнения: $x_1 + x_2 = -\frac{2c}{a}$; $x_1 + 2x_2 = -\frac{c}{a}$. Вычитая, получаем $x_2 = \frac{c}{a}$. Но тогда из $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ и $x_2 = \frac{c}{a}$ получаем, что $x_1 = 1$. Тогда $1 + x_2 = -\frac{2c}{a}$ и $1 + 2x_2 = -\frac{c}{a}$, откуда $1 + x_2 = 2(1 + 2x_2)$, получаем, что $x_2 = -\frac{1}{3}$. Итак, подходит квадратный трёхчлен $3x^2 - 2x - 1$. Заметим, что если выбрать другие пары коэффициентов, примеры существуют и находятся таким же способом: $2x^2 + x - 3$ имеет корни 1 и $-\frac{3}{2}$, а

x^2+2x-3 имеет корни 1 и -3; $x^2-\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x+\frac{1}{\sqrt{2}}$ имеет корни 1 и $\frac{1}{\sqrt{2}}$, а $\frac{1}{\sqrt{2}}x^2-\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x+1$ имеет корни 1 и $\sqrt{2}$.
Комментарий. *Приведен любой верный пример квадратных трехчленов – 7 баллов. Доказано, что 1 является общим корнем – 3 балла. Если в примере имеются нулевые коэффициенты – 0 баллов. Только ответ без примера – 0 баллов.*

11.3. Найдите все натуральные решения уравнения $n!=3^a+3^b$. (Факториалом натурального числа n называется произведение $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$.)
Ответ. $n=3$, $a=b=1$.
Решение. При $n=1$ или $n=2$ число $n!$ меньше степени тройки. При $n\geq 4$ число $n!$ делится на 8. Рассмотрим остатки при делении на 8 степеней тройки. Если число, дающее остаток 1 при делении на 8, умножить на 3, получится число, дающее остаток 3 при делении на 8, т.к. $3(8k+1)=8(3k)+3$. Если число, дающее остаток 3 при делении на 8, умножить на 3, получится число, дающее остаток 1 при делении на 8, т.к. $3(8k+3)=8(3k+1)+1$. А так как 3^1 даёт остаток 3 при делении на 8, то остатки при делении степеней тройки на 8 должны чередоваться и могут быть равны либо 1, либо 3. Но тогда сумма двух степеней тройки при делении на 8 даёт остатки 2 или 4 или 6, противоречие. Остаётся случай $n=3$, который и даёт ответ: $n=3$, $a=b=1$. Заметим, что может помочь не только делимость на 8. Например, рассмотрение остатков при делении на 11 тоже даёт нужный результат (хотя перебор малых значений n усложняется).
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Отсутствие рассмотрения случаев n<4 – снижать на 1 балл. Отсутствие доказательства факта «остатки при делении степеней тройки на 8 могут быть равны либо 1, либо 3» – снижать на 1 балл. Только ответ – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

11.4. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ выбраны точки E и F соответственно так, что точки E, F и точки пересечения прямых CE и BF с прямой AD лежат на одной окружности. Докажите, что точки E, F и точки пересечения прямых DE и AF с прямой BC лежат на одной окружности.
Решение. Проведем EF. Пусть BF пересекает AD в точке K, а CE пересекает AD в точке T. Тогда из вписанности четырехугольника $EFKT$ следует $\angle FKT=\angle CEF$, а так как $AD \parallel BC$, то $\angle FKT=\angle CBF$. Но тогда четырехугольник $BCFE$ вписанный. Значит, $\angle C$ трапеции равен $\angle AEF$, также $\angle C$ трапеции дополняет $\angle D$ трапеции до 180°. Значит, четырехугольник $AEFD$ вписанный, откуда $\angle AFE=\angle ADE$. Пусть DE и AF пересекаются с прямой BC в точках N и M соответственно. Ввиду параллельности $\angle ADE=\angle MNE$. Значит, в четырехугольнике $ENMF$ внутренний угол N равен внешнему при противоположном угле, т.е. он вписанный.
Комментарий. *Так как решение состоит из трёх переходов вида «четыре точки на одной окружности, следовательно, другие четыре точки на одной окружности», то за каждый переход по 2 балла. Наличие всех трёх переходов – 7 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений или потенциально полезные идеи – 2 балла. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

11.5. Можно ли натуральные числа от 1 до 2021 раскрасить в 22 цвета так, чтобы для любых четырёх различных одноцветных чисел a, b, c и d не выполнялось равенство $a+b=c+d$?
Ответ. Нельзя.
Решение. Пусть это возможно и раскраска существует. Заметим, что по принципу Дирихле есть хотя бы $\frac{2021}{22}$ чисел одного цвета, т.е. хотя бы 91 число. Рассмотрим всевозможные попарные разности этих одноцветных чисел, причем будем из большего вычитать меньшее. Тогда этих разностей хотя бы $C_{91}^2=4095$, а значения этих разностей находятся в промежутке от 1 до $2021-1=2020$, всего 2020 значений. Тогда по принципу Дирихле найдутся хотя бы $\frac{4095}{2020}$ пар чисел с одинаковой разностью, т.е. хотя бы 3 пары. Заметим, что две из этих трёх пар точно не имеют общих элементов, потому что совпадать по двум элементам они не могут, а совпадать по одному элементу могут, если в одной паре это большее число, а в другой меньшее, тогда третья пара не сможет пересечься с обеими предыдущими одновременно. Значит, найдены такие 4 числа, что $a-b=c-d$ или, что то же самое, что $a+c=b+d$. Противоречие.

Комментарий. *Показано, что найдётся 91 одноцветное число – 1 балл. Идея рассмотрения попарных разностей вместо попарных сумм – еще 1 балл. Если в работе говорится, что из того, что найдутся 2 пары с одинаковой разностью, следует, что они и дадут нужную четверку чисел – не больше 4 баллов. Если в работе говорится, что из того, что найдутся 2 пары с одинаковой суммой, следует, что они и дадут нужную четверку чисел – не больше 3 баллов. Верный ответ без обоснования – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*