Всероссийская олимпиада школьников. Муниципальный этап 2022/23 уч.г.
Математика, 7 класс, решения

Время выполнения 235 мин. Максимальное кол-во баллов – 35

Все задания по 7 баллов

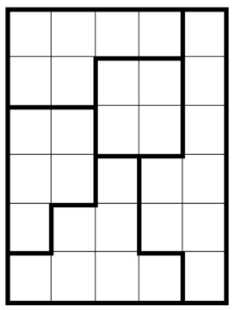
Критерии оценивания заданий

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям

7.1. Каждый ученик 7 класса занимается в кружке по математике или информатике, причем два ученика занимаются и в кружке по математике, и по информатике. Две трети всех учеников занимаются в кружке по математике, а 40% – в кружке по информатике. Сколько учеников в этом классе?
Ответ. 30.
Решение. Заметим, что 40% – это $\frac{2}{5}$ всех учеников. Сложим $\frac{2}{3}$ и $\frac{2}{5}$ – получим $\frac{16}{15}$. Два ученика, которые занимаются в кружках по математике и информатике, были учтены два раза. Значит, два ученика – это и есть $\frac{1}{15}$ всего класса, следовательно, в классе $2 \cdot 15 = 30$ человек.
Комментарий. *Верное решение – 7 баллов. Верная идея решения, но ответ получен неверный – 3 балла. Задача решена подбором, не показано, что других вариантов нет – 2 балла. Решение начато, есть некоторое продвижение – 1 балл. Дан верный ответ без объяснений – 1 балл.*

7.2. Разрежьте по линиям сетки клетчатый прямоугольник 5×6 на пять фигурок, площади которых будут пятью последовательными натуральными числами, а периметр каждой фигурки будет в два раза больше её площади.
Решение. Найдем площади нужных многоугольников. Пусть x – площадь многоугольника с наименьшей площадью. Тогда $x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 = 30$, откуда $x = 4$, значит, площади многоугольников равны 4, 5, 6, 7, 8. Тогда их периметры 8, 10, 12, 14 и 16 соответственно. На рисунке приведен пример возможного разрезания.



Замечание. Участнику достаточно привести любой верный пример разрезания, не объясняя, как он был получен. В свою очередь, при проверке нужно следить, чтобы все условия были выполнены. Периметры многоугольников можно контролировать, мысленно «вписывая» клетчатый многоугольник в прямоугольник с тем же периметром: $8 - 2 \times 2$, $10 - 2 \times 3$, $12 - 2 \times 4$, $14 - 3 \times 4$, $16 - 2 \times 6$.
Комментарий. *Приведен верный пример – 7 баллов. Верный рисунок является достаточным обоснованием ответа, за отсутствие пояснений баллы не снимать.*

7.3. Сколько существует семизначных натуральных чисел, у которых произведение трёх первых цифр равно 30, произведение трёх цифр, стоящих в центре, равно 7, а произведение трёх последних цифр равно 15?

Ответ. 72.

Решение. Обозначим число $\overline{abcdefg}$. По условию $cde = 7$, значит, одна из этих цифр равняется 7, а две другие равны 1. Поскольку 30 и 15 не делятся на 7, $d = 7$, $c = e = 1$. Число $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 5 \cdot 6 \cdot 1$ (в любом порядке). Каждый вариант даёт 6 трёхзначных чисел $\overline{abc}$, всего 12 вариантов. Число $15 = 1 \cdot 3 \cdot 5$ (в любом порядке), всего 6 вариантов. Окончательно получаем $12 \cdot 6 = 72$ числа.

Комментарий. *Полное решение задачи – 7 баллов. Найдены только значения трёх средних цифр – 1 балл. Указаны возможные значения для остальных цифр, но число вариантов не найдено – 2 балла, баллы суммируются. За арифметическую ошибку снимать 1 балл.*

7.4. В клетчатом квадрате 5×5 есть 5 столбцов, 5 строк и 18 диагоналей (диагонали длины один также учитываются). В каждую клетку этого квадрата записали одно из чисел 1, 3, 5 или 7 и посчитали сумму чисел в каждом столбце, строке и диагонали. Докажите, что среди полученных сумм найдутся хотя бы две равные между собой.

Решение. Будем называть строку, столбец или диагональ, вдоль которой суммировали числа, *линией*. Заметим, что всего есть 20 *линий*, состоящих из нечётного числа клеток (по 5 *линий* каждого направления). Так как все числа в таблице нечётны, то и все суммы в этих *линиях* нечётны. При этом они не могут превышать $5 \cdot 7 = 35$. Нечётных чисел от 1 до 35 всего $\frac{35-1}{2} + 1 = 18$. Значит, по принципу Дирихле в каких-то двух линиях окажется одно и то же число.

Комментарий. *Любое полное решение задачи – 7 баллов. Идея рассмотрения только линий с нечётным количеством клеток или только нечётных сумм или сумм с нечётным количеством слагаемых, но дальнейших продвижений нет – 1 балл. Указано, что линий с нечётным количеством клеток ровно 20, но дальнейших продвижений нет – 3 балла. Указано, что возможных нечётных сумм всего 18, но дальнейших продвижений нет – 3 балла.*

7.5. За круглым столом сидят 10 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждому из них дали по фишке. Затем каждый из сидящих передал свою фишку одному из двух своих соседей. После чего 5 человек сказали: «У меня одна фишка», а остальные 5 сказали: «У меня нет фишек». Какое наибольшее число рыцарей могло быть среди этих 10 человек?

Ответ. 7.

Решение. *Оценка.* После передачи фишек у каждого из сидящих за столом может быть 0, 1 или 2 фишек. А суммарное число фишек будет равно 10. Заметим, что если человек солжёт, то он назовет количество фишек, которое отличается от настоящего на 1 или 2. Так как по ответам суммарное число фишек отличается от настоящего на $10 - 5 = 5$, то не меньше 3 человек должны были солгать. Поэтому за столом сидит не больше 7 рыцарей.

Пример. Пусть рыцари за столом сидят и передают фишки так (стрелочкой показано, куда передается монета: в скобках указано количество фишек после передачи):

$$\leftarrow Р(0) - Р(0) \rightarrow Р(1) \rightarrow Р(1) \rightarrow Р(1) \rightarrow Р(1) \rightarrow Р(1) \rightarrow Л(1) \rightarrow Л(2) \leftrightarrow Л(2) \leftarrow.$$

При этом все рыцари говорят правду, а лжецы лгут, говоря, что у них 0 фишек.

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Верно получена оценка – 5 баллов, построен верный пример – 2 балла, баллы суммируются. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*